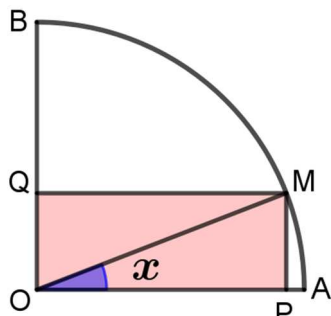


1. Determina sopra l'arco AB , quarta parte di una circonferenza di centro O e raggio 2 , un punto M , le cui proiezioni su OA e OB siano rispettivamente P e Q , in modo che l'area del rettangolo $OPMQ$ sia $\sqrt{2}$.



$$OA \perp OB \quad \mathcal{A}_{OPMQ} = \sqrt{2} \quad \overline{OA} = 2 \quad MP \perp OA \quad MQ \perp OB \quad P \in OA \quad Q \in OB$$

Individuato l'angolo $\widehat{POM} = x$, date le ipotesi del problema, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Per porre l'area del rettangolo $OPMQ$ uguale al valore dato e determinare, così, il corrispondente valore dell'angolo, devo determinare la lunghezza dei segmenti \overline{MP} e \overline{OP} , rispettivamente altezza e base del rettangolo. Per i teoremi dei triangoli rettangoli:

$$\overline{MP} = \overline{OM} \sin x = 2 \sin x \quad \overline{OP} = \overline{OM} \cos x = 2 \cos x$$

Pongo l'area uguale a $\sqrt{2}$ per determinare l'angolo:

$$\mathcal{A}_{OPMQ} = \overline{MP} \cdot \overline{OP} = 2 \sin x \cdot 2 \cos x = 2 \sin 2x$$

Risolve l'equazione:

$$2 \sin 2x = \sqrt{2} \quad \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Date le limitazioni del problema:

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < 2x < \pi$$

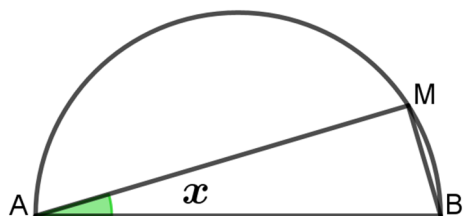
Otengo le soluzioni:

$$2x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} \quad 2x = \frac{3}{4}\pi \Rightarrow x = \frac{3}{8}\pi$$

Corrispondenti a due situazioni simmetriche rispetto alla bisettrice dell'angolo.

2. È data una semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 2r$. Determina su di essa un punto M tale che sia

$$2 \overline{AM}^2 + 3 \overline{AB}^2 = 4 \overline{BM}^2 + 2 \overline{MO}^2$$



$$\overline{AB} = 2r \quad \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{MO} = r$$

Dato che un triangolo inscritto con un lato coincidente con il diametro di una circonferenza è sempre rettangolo, il triangolo ABM è rettangolo in M . Posso, quindi, applicare i teoremi dei triangoli rettangoli:

$$\overline{BM} = \overline{AB} \sin x = 2r \sin x \quad \overline{AM} = \overline{AB} \cos x = 2r \cos x$$

$$\text{con } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Posso sostituire le lunghezze dei segmenti nella relazione data:

$$2 \cdot (2r \cos x)^2 + 3 \cdot (2r)^2 = 4 \cdot (2r \sin x)^2 + 2r^2$$

Semplifico l'equazione:

$$8r^2 \cos^2 x + 12r^2 = 16r^2 \sin^2 x + 2r^2 \quad 4 \cos^2 x - 8 \sin^2 x + 5 = 0$$

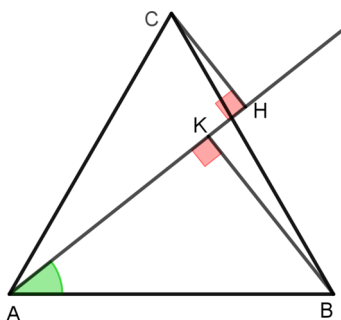
Per la prima relazione fondamentale: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow 4 \cos^2 x - 8(1 - \cos^2 x) + 5 = 0 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4}$

Otengo le soluzioni: $\cos x = \pm \frac{1}{2}$

Date le limitazioni del problema:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

3. Dato il triangolo equilatero ABC di lato di misura l , conduci per il vertice A, internamente all'angolo $B\hat{A}C$, una semiretta tale che la somma dei quadrati delle distanze \overline{CH} e \overline{BK} dei vertici B e C da essa sia $\frac{1}{2}l^2$.



$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = l \quad H, K, A \text{ allineati} \quad AH \perp CH \quad AK \perp BK \quad \overline{CH}^2 + \overline{BK}^2 = \frac{l^2}{2}$$

Individuato l'angolo $B\hat{A}K = x$, essendo ABC un triangolo equilatero, $0 < x < \frac{\pi}{3}$. Per le ipotesi del problema, posso riconoscere i triangoli rettangoli ABK e AHC e applicare i teoremi dei triangoli rettangoli per determinare le misure dei cateti CH e BK:

$$\overline{BK} = \overline{AB} \sin x = l \sin x \quad \overline{CH} = \overline{AC} \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = l \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

Posso sostituire le lunghezze dei segmenti nella relazione data: $(l \sin x)^2 + \left[l \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\right]^2 = \frac{l^2}{2}$

Semplifico l'equazione: $l^2 \sin^2 x + l^2 \left(\sin\frac{\pi}{3} \cos x - \cos\frac{\pi}{3} \sin x\right)^2 = \frac{l^2}{2} \quad \sin^2 x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x\right)^2 = \frac{1}{2}$

$$\sin^2 x + \frac{3}{4} \cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{4} \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow 5 \sin^2 x + 3 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x = 2 \cos^2 x + 2 \sin^2 x$$

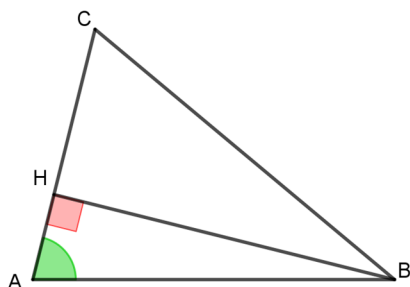
$$3 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 0 \Rightarrow (\sqrt{3} \sin x - \cos x)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$$

Per l'angolo aggiunto: $2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$

Date le limitazioni del problema, ottengo la soluzione: $x - \frac{\pi}{6} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

4. Del triangolo acutangolo ABC sai che $\overline{AB} = l$ e $\sin \hat{C} = \frac{9}{10}$. Posto $B\hat{A}C = x$, traccia l'altezza BH relativa al lato AC e trova per quali valori di x si ha:

$$(\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot \overline{BH} = \frac{7}{9}l^2$$



$$\overline{AB} = l \quad \sin \hat{C} = \frac{9}{10} \quad B\hat{A}C < \frac{\pi}{2} \quad A\hat{B}C < \frac{\pi}{2} \quad B\hat{C}A < \frac{\pi}{2} \quad B\hat{A}C = x$$

$$H \in AC \quad AH \perp AC \quad (\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot \overline{BH} = \frac{7}{9}l^2$$

Trattandosi di un triangolo acutangolo: $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Visto che ABH è un triangolo rettangolo, applico i teoremi dei triangoli rettangoli al triangolo ABH:

$$\overline{HB} = \overline{AB} \sin x = l \sin x$$

e al triangolo HBC: $\overline{HB} = \overline{BC} \sin \hat{C} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{\overline{HB}}{\sin \hat{C}} = \frac{10}{9}l \sin x$

Sostituisco nella relazione data e semplifico l'equazione: $\left(l + \frac{10}{9}l \sin x\right) \cdot l \sin x = \frac{7}{9}l^2 \quad 10 \sin^2 x + 9 \sin x - 7 = 0$

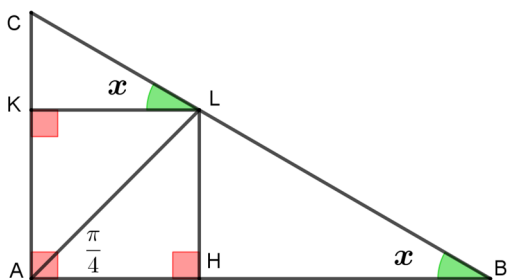
Risolve l'equazione: $(\sin x)_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 280}}{20} = \frac{-9 \pm 19}{20} \quad (\sin x)_1 = \frac{1}{2} \quad (\sin x)_2 = -\frac{28}{20}$

Una soluzione è minore di -1 , mentre l'altra, date le limitazioni del problema, è: $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

5. Determina l'ampiezza dell'angolo acuto $\hat{A}BC$ del triangolo ABC, rettangolo in A, in modo che, detta AL la bisettrice dell'angolo retto, sia verificata la relazione:

$$\frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{\overline{AL}} = \frac{2\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{3}$$

$$C\hat{A}B = \frac{\pi}{2} \quad L\hat{A}B = \frac{\pi}{4} \quad A\hat{B}C = x \quad L \in BC \quad \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{\overline{AL}} = \frac{2\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{3}$$



Trattandosi di un triangolo rettangolo, posso notare che $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Applicando i teoremi sui triangoli rettangoli, ottengo:

$$\overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HB} = \overline{AL} \cos \frac{\pi}{4} + \overline{LH} \cot x = \overline{AL} \cos \frac{\pi}{4} + \overline{AL} \sin \frac{\pi}{4} \cot x$$

$$\overline{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2} \overline{AL} (1 + \cot x)$$

Sempre per i teoremi dei triangoli rettangoli: $\overline{AC} = \overline{AB} \tan x$

Perciò:

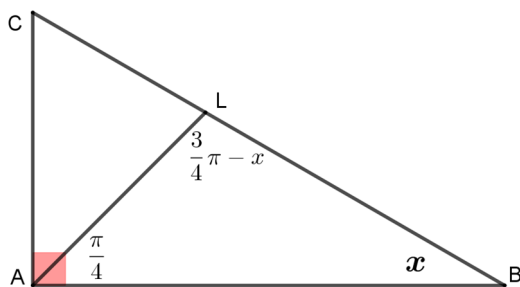
$$\frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{\overline{AL}} = \frac{\overline{AB} (1 + \tan x)}{\overline{AL}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \overline{AL} (1 + \cot x) \frac{1 + \tan x}{\overline{AL}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (2 + \cot x + \tan x)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (2 + \cot x + \tan x) = \frac{2\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{3} \Rightarrow 2 + \cot x + \tan x = \frac{4}{3}\sqrt{3} + 2 \Rightarrow \tan^2 x - \frac{4}{3}\sqrt{3} \tan x + 1 = 0$$

$$(\tan x)_{1,2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\tan x)_1 = \sqrt{3} \quad (\tan x)_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Date le limitazioni del problema, ottengo le soluzioni: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ $x_2 = \frac{\pi}{6}$

Secondo svolgimento (più faticoso dal punto di vista del calcolo):



Per cominciare, trattandosi di un triangolo rettangolo, posso determinarne le misure dei cateti in funzione dell'ipotenusa e di x, applicando i teoremi dei triangoli rettangoli:

$$\overline{AB} = \overline{BC} \cos x \quad \overline{AC} = \overline{BC} \sin x$$

con $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Applico il teorema dei seni al triangolo ABL per determinare la lunghezza della bisettrice:

$$\frac{\overline{AL}}{\sin x} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\frac{3}{4}\pi - x)} \Rightarrow \overline{AL} = \frac{\overline{AB} \sin x}{\sin(\frac{3}{4}\pi - x)} = \overline{BC} \frac{\cos x \sin x}{\sin(\frac{3}{4}\pi - x)}$$

A questo punto posso sostituire le misure appena determinate nella relazione data:

$$\frac{\overline{BC} \cos x + \overline{BC} \sin x}{\overline{BC} \frac{\cos x \sin x}{\sin(\frac{3}{4}\pi - x)}} = \frac{2\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \frac{\overline{BC}(\cos x + \sin x)}{\overline{BC} \frac{\cos x \sin x}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x}} = \frac{2\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)^2}{\cos x \sin x} = \frac{\sqrt{2}(2\sqrt{3} + 3)}{3}$$

$$\frac{1 + 2 \cos x \sin x}{\cos x \sin x} = \frac{4\sqrt{3} + 6}{3} \Rightarrow \frac{1}{\cos x \sin x} + 2 = \frac{4\sqrt{3}}{3} + 2 \Rightarrow \frac{1}{\cos x \sin x} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow 2 \cos x \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Date le limitazioni del problema: $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < 2x < \pi$

Ottingo le soluzioni: $2x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ $2x = \frac{2}{3}\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$