1. $-\cos(\pi - x) + \cos x - \tan(\pi - x) + \cot(\pi - x) + \cot x = \dfrac{2\cos^2 x + \sin x}{\cos x}$

$-(-\cos x) + \cos x - (-\tan x) + (-\cot x) + \cot x = 2\cos x + \tan x$

$\cos x + \cos x + \tan x - \cot x + \cot x = 2\cos x + \tan x$ $\qquad$ $\mathbf{2\cos x + \tan x = 2\cos x + \tan x}$

2. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)}{\cos(x - 3\pi) + \sin(x - \pi)} \cdot \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(\pi - x)}{\cos(2\pi - x) + \sin(-x)} = -1$

$\dfrac{\cos x - \sin x}{-\cos x - \sin x} \cdot \dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = -1$ $\qquad$ $\dfrac{\cos x - \sin x}{-(\cos x + \sin x)} \cdot \dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = -1$ $\qquad$ $\mathbf{-1 = -1}$

3. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -2\sqrt{3}\sin x \cos x$

$\cos 2x \cos\frac{\pi}{3} - \sin 2x \sin\frac{\pi}{3} - \sin 2x \cos\frac{\pi}{6} - \cos 2x \sin\frac{\pi}{6} = -2\sqrt{3}\sin x \cos x$

$\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x = -\sqrt{3}\sin 2x$ $\qquad$ $\mathbf{-\sqrt{3}\sin 2x = -\sqrt{3}\sin 2x}$

4. $\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 (1 - \sin x) - \tan\frac{x}{2}\sin 2x = 3\cos^2 x - 2\cos x$

$\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)(1 - \sin x) - \dfrac{1 - \cos x}{\sin x} \cdot 2\sin x \cos x = 3\cos^2 x - 2\cos x$

$(1 + \sin x)(1 - \sin x) - 2\cos x\,(1 - \cos x) = 3\cos^2 x - 2\cos x$

$1 - \sin^2 x - 2\cos x + 2\cos^2 x = 3\cos^2 x - 2\cos x$ $\qquad$ $\mathbf{\cos^2 x + 2\cos^2 x = 3\cos^2 x}$

5. Usando le formule goniometriche, dimostra che $\dfrac{\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}} = \sqrt{2} - 1$.

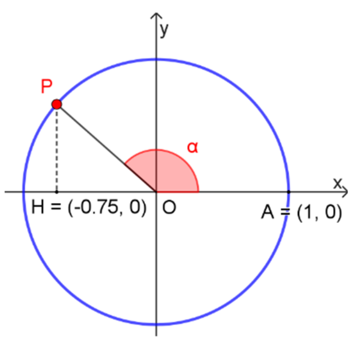
$$\frac{\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}} = \frac{\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}} = \frac{\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} - 2\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}}{\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}} = \frac{1 - \sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$$

6. Se α è l'angolo indicato in figura, calcola:

A. $\sin\alpha - \cos\alpha$

B. $\sec\alpha - 2\tan\alpha$

C. $\csc\alpha + \cot\alpha$



A. Il coseno dell'angolo corrisponde all'ascissa del punto P, e quindi all'ascissa del punto H. Posso determinare il seno dalla prima relazione fondamentale:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha - \cos\alpha = \mathbf{\frac{\sqrt{7} - 3}{4}}$$

B. $\sec\alpha - 2\tan\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} - \dfrac{2\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\dfrac{4}{3} - 2 \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{4} \cdot \left(-\dfrac{4}{3}\right) = \mathbf{\dfrac{2\sqrt{7} - 4}{3}}$

C. $\csc\alpha + \cot\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \left(1 - \dfrac{3}{4}\right) \cdot \dfrac{4}{\sqrt{7}} = \mathbf{\dfrac{\sqrt{7}}{7}}$

7. Dopo aver determinato quali valori può assumere il parametro reale k affinché abbia significato la relazione $\cos x = \frac{2-k}{k}$, determinare quali valori può assumere k se $x \in \left[\pi; \frac{3}{2}\pi\right]$.

Il coseno assume valori compresi tra -1 e 1, perciò:

$$-1 \leq \frac{2-k}{k} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq \frac{2}{k} - 1 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{2}{k} \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{2}{k} \geq 0 \\ \frac{2}{k} \leq 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} k > 0 \\ k < 0 \quad \vee \quad k \geq 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k \geq 1}$$

Se $x \in \left[\pi; \frac{3}{2}\pi\right]$, $-1 \leq \cos x \leq 0$, perciò:

$$-1 \leq \frac{2-k}{k} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{2}{k} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{2}{k} \geq 0 \\ \frac{2}{k} \leq 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} k > 0 \\ k < 0 \quad \vee \quad k \geq 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k \geq 2}$$

8. Scrivi l'equazione della retta passante per $P(2; 1)$ e formante un angolo di $30°$ con la direzione positiva dell'asse x.

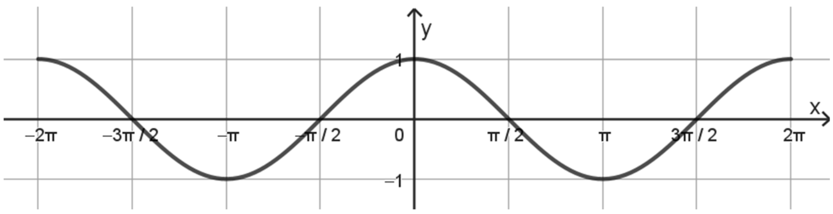
Il coefficiente angolare di una retta è dato dalla tangente dell'angolo che la retta forma con l'asse x:

$$y - y_P = \tan 30° \, (x - x_P) \quad \Rightarrow \quad y - 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x\sqrt{3} - 3y - 2\sqrt{3} + 3 = 0}$$

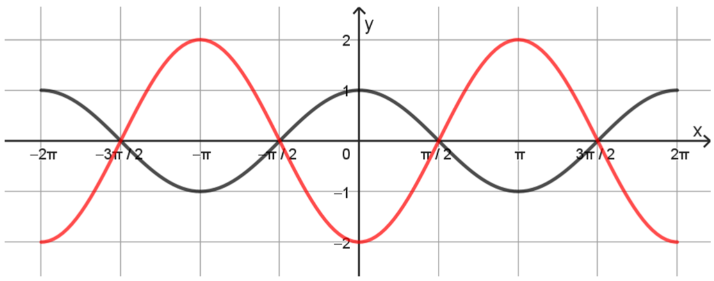
9. Traccia le due curve di equazione:

$$y = 4 - 2\cos\left(x + \frac{5}{6}\pi\right)$$

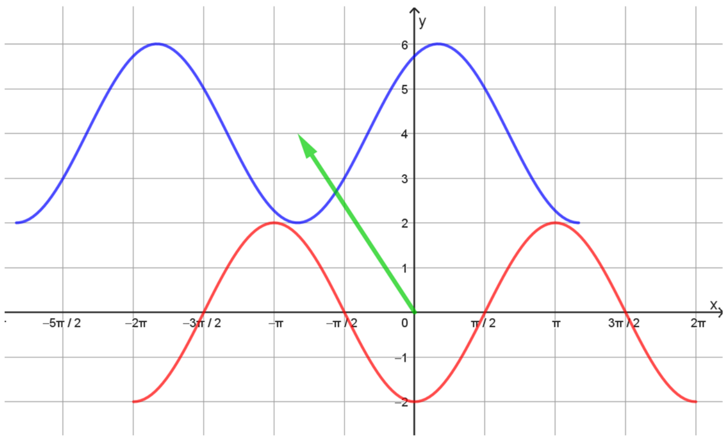
$y = \cos x$



Dilatazione lungo l'asse y di un fattore 2 e simmetria rispetto all'asse x:
$y = -2\cos x$



Traslazione di un vettore
$\vec{v}\left(-\frac{5}{6}\pi; 4\right)$
$y = 4 - 2\cos\left(x + \frac{5}{6}\pi\right)$

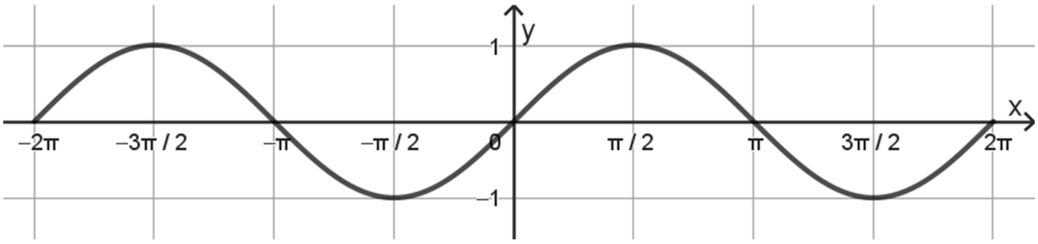


$y = 1 - \sin x + \cos x$

Riscrivo la funzione usando l'angolo aggiunto:

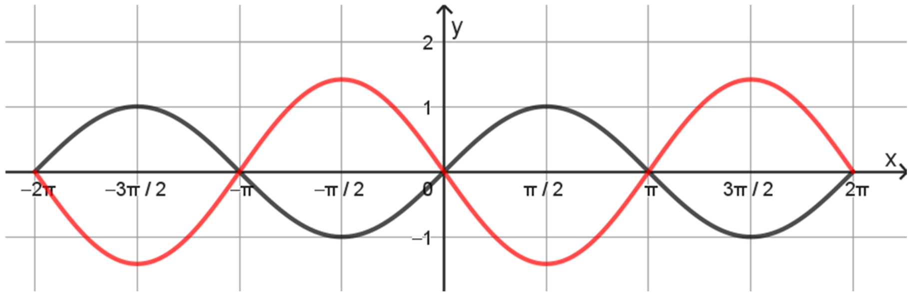
$$y = 1 - (\sin x - \cos x) = 1 - \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$y = \sin x$



Dilatazione lungo l'asse y di un fattore $\sqrt{2}$ e simmetria rispetto all'asse x:

$y = -\sqrt{2}\sin x$



Traslazione di un vettore $\vec{v}\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$

$y = 1 - \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$