

1.

$$f_1(x) = \frac{x - 2}{(x + 1)(x^2 - 4)}$$

1. Dominio:  $D = ]-\infty; -2[ \cup ]-2; -1[ \cup ]-1; 2[ \cup ]2; +\infty[$  trattandosi di una funzione razionale fratta, devo porre il denominatore diverso da 0.

2. Eventuali simmetrie: avendo un dominio asimmetrico, la funzione non è né pari né dispari

3. Intersezioni con gli assi: La funzione può essere riscritta:  $f(x) = \frac{x-2}{(x+1)(x^2-4)} = \frac{x-2}{(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$

La funzione non ha intersezioni con l'asse x, visto che il numeratore è sicuramente diverso da 0.

$$\text{asse } y: \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{(x+1)(x+2)} \end{cases} \quad A\left(0; \frac{1}{2}\right)$$

4. Positività: determinare la positività è semplice, visto che si tratta del segno di due binomi di primo grado:

$$(x + 1)(x + 2) > 0 \quad x < -2 \quad \vee \quad x > -1$$

5. Eventuali asintoti:

$$\lim_{x \rightarrow -2^\pm} \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \mp \infty \quad x = -2 \text{ asintoto verticale}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^\pm} \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \pm \infty \quad x = -1 \text{ asintoto verticale}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{12} \quad x = 2 \text{ singolarità eliminabile}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)} = 0 \quad y = 0 \text{ asintoto orizzontale}$$

6. Massimi e minimi:

$$f_1'(x) = -\frac{2x + 3}{(x + 1)^2(x + 2)^2}$$

Punti stazionari per  $x = -3/2$ .

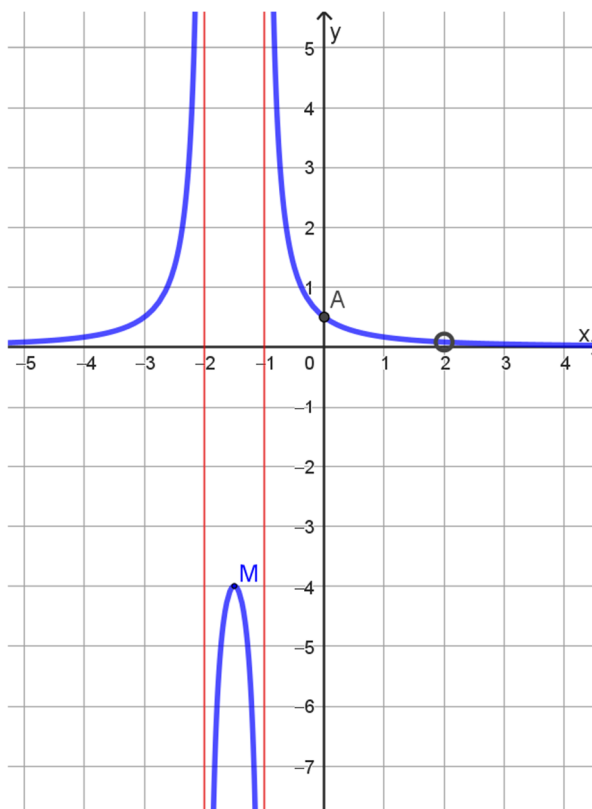
La derivata è positiva per  $x < -3/2$ , perciò ha massimo in

$$M\left(-\frac{3}{2}; -4\right).$$

7. Punti di flesso:

$$\begin{aligned} f_1''(x) &= \frac{-2(x+1)^2(x+2)^2 + 2(x+1)(x+2)(2x+3)^2}{(x+1)^4(x+2)^4} = \\ &= 2 \frac{-x^2 - 3x - 2 + 4x^2 + 12x + 9}{(x+1)^3(x+2)^3} = \frac{2(3x^2 + 9x + 7)}{(x+1)^3(x+2)^3} > 0 \end{aligned}$$

Positiva quando il denominatore è positivo, ovvero quando la funzione è positiva, quindi non ha flessi. Questo perché il numeratore ha un discriminante negativo, perciò è sempre positivo.



$$f_2(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$$

1. Dominio:  $D = [0; 1[ \cup ]1; +\infty[$  trattandosi di una funzione irrazionale e fratta, devo porre il denominatore diverso da 0 e il radicando positivo.
2. Eventuali simmetrie: avendo un dominio asimmetrico, la funzione non è né pari né dispari
3. Intersezioni con gli assi: la funzione non ha intersezioni con l'asse x, visto che il numeratore è sicuramente diverso da 0.

$$\text{asse } y: \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \end{cases} \quad A(0; 1)$$

4. Positività: il segno della funzione dipende dal segno del denominatore:

$$1 - \sqrt{x} > 0 \quad \sqrt{x} < 1 \quad 0 \leq x < 1$$

5. Eventuali asintoti:

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} = \mp \infty \quad x = 1 \text{ asintoto verticale}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{-\sqrt{x}} = -1 \quad y = -1 \text{ asintoto orizzontale}$$

6. Massimi e minimi:

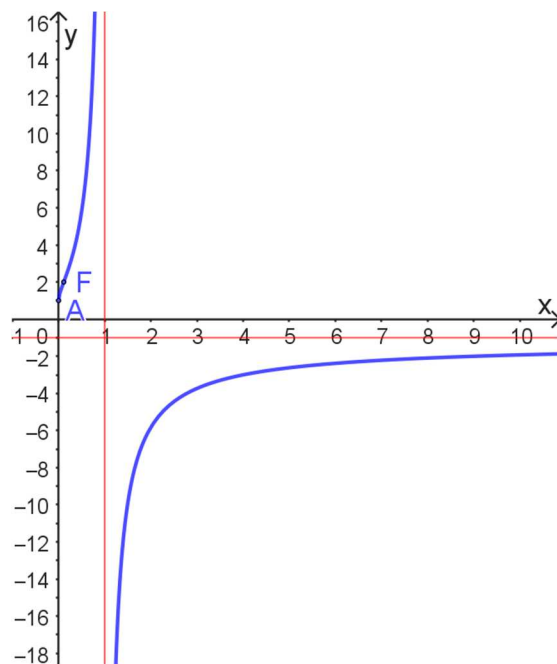
$$f_2'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1 - \sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}}(1 + \sqrt{x})}{(1 - \sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})^2} > 0$$

La derivata è sempre positiva perciò la funzione è sempre crescente.

7. Punti di flesso:

$$f_2''(x) = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1 - \sqrt{x})^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 2(1 - \sqrt{x}) \cdot \sqrt{x}}{x(1 - \sqrt{x})^4} = \frac{\sqrt{x} - 1 + 2\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})^3} = \frac{3\sqrt{x} - 1}{2x\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})^3} > 0$$

Positiva per  $\frac{1}{3} < \sqrt{x} < 1$ , cioè:  $\frac{1}{9} < x < 1$  e quindi con flesso in  $F(\frac{1}{9}; 2)$ .



2.

$$g_1(x) = \frac{4 \ln x - 2}{x^2}$$

1. Dominio:  $D = ]0; +\infty[$  trattandosi di una funzione trascendente e fratta, devo porre l'argomento del logaritmo maggiore di 0 e il denominatore diverso da zero.
2. Eventuali simmetrie: avendo un dominio asimmetrico, la funzione non è **né pari né dispari**
3. Intersezioni con gli assi: la funzione non ha intersezioni con l'asse y, escluso dal dominio.

$$\text{asse } x: \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{4 \ln x - 2}{x^2} \end{cases} \quad 4 \ln x - 2 = 0 \quad \ln x = \frac{1}{2} \quad x = \sqrt{e} \quad A(\sqrt{e}; 0)$$

4. Positività: il segno della funzione dipende dal segno del numeratore:

$$4 \ln x - 2 > 0 \quad \ln x > \frac{1}{2} \quad x > \sqrt{e}$$

5. Eventuali asintoti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 \ln x - 2}{x^2} = -\infty \quad x = 0 \text{ asintoto verticale}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x - 2}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{x}}{2x} = 0 \quad y = 0 \text{ asintoto orizzontale}$$

6. Massimi e minimi:

$$g_1'(x) = \frac{\frac{4}{x}x^2 - 2x(4 \ln x - 2)}{x^4} = \frac{8(1 - \ln x)}{x^3} > 0$$

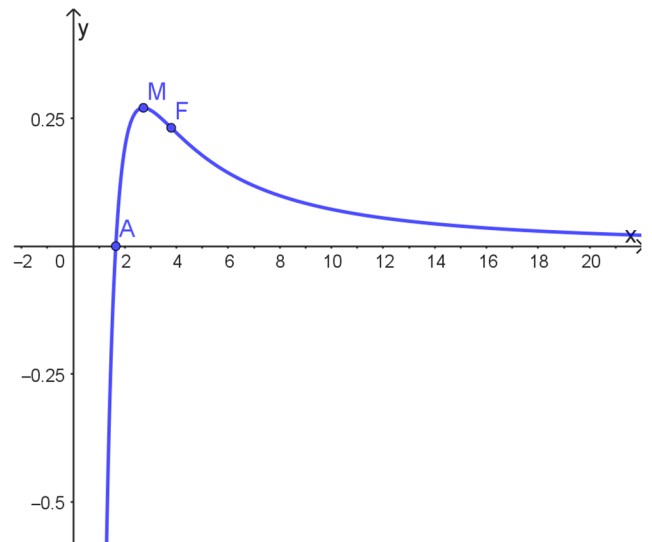
Il denominatore è sempre positivo, visto il dominio, mentre il numeratore è positivo se  $\ln x < 1$ , ovvero con  $x < e$ , quindi  $M(e; \frac{2}{e^2})$  è un punto di massimo.

7. Punti di flesso:

$$g_1''(x) = 8 \frac{-\frac{1}{x}x^3 - 3x^2(1 - \ln x)}{x^6} = \frac{8}{x^4}(3 \ln x - 4) > 0$$

Positiva per  $\ln x > \frac{4}{3}$ , cioè:  $x > \sqrt[3]{e^4}$  e quindi con flesso in

$$F(\sqrt[3]{e^4}; \frac{10}{3\sqrt[3]{e^8}})$$



$$g_2(x) = \arctan \frac{2-x}{4-x}$$

1. Dominio:  $D = ]-\infty; 4[ \cup ]4; +\infty[$  trattandosi di una funzione trascendente definita per ogni valore del suo argomento, devo solo porre il denominatore dell'argomento diverso da zero.
2. Eventuali simmetrie: avendo un dominio asimmetrico, la funzione non è né pari né dispari
3. Intersezioni con gli assi:

$$\text{asse } x: \begin{cases} y = 0 \\ y = \arctan \frac{2-x}{4-x} \end{cases} \quad \arctan \frac{2-x}{4-x} = 0 \quad \frac{2-x}{4-x} = 0 \quad x = 2 \quad A(2; 0)$$

$$\text{asse } y: \begin{cases} x = 0 \\ y = \arctan \frac{2-x}{4-x} \end{cases} \quad y = \arctan \frac{2}{4} \quad B\left(0; \arctan \frac{1}{2}\right)$$

4. Positività: l'arcotangente è positiva quando il suo argomento è positivo, perciò:

$$\frac{2-x}{4-x} > 0 \quad x < 2 \quad \vee \quad x > 4$$

5. Eventuali asintoti:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan \frac{2-x}{4-x} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \quad y = \frac{\pi}{4} \text{ asintoto orizzontale}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \arctan \frac{2-x}{4-x} = -\frac{\pi}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} \arctan \frac{2-x}{4-x} = \frac{\pi}{2} \quad x = 4 \text{ discontinuità di prima specie}$$

6. Massimi e minimi:

$$g_2'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2-x}{4-x}\right)^2} \cdot \frac{-1(4-x) + 2-x}{(4-x)^2} = \frac{(4-x)^2}{16 - 8x + x^2 + 4 - 4x + x^2} \cdot \frac{-2}{(4-x)^2} = -\frac{1}{x^2 - 6x + 10} > 0$$

La derivata è sempre positiva, visto che il denominatore ha un discriminante negativo, e quindi è sempre positivo. La funzione, quindi, è sempre crescente.

7. Punti di flesso:

$$g_2''(x) = \frac{2x - 6}{(x^2 - 6x + 10)^2} > 0$$

Positiva per  $x > 3$ , e quindi con flesso in  $F\left(3; -\frac{\pi}{4}\right)$ .

