1. Un proiettile viene lanciato con una velocità iniziale di modulo $12\ m/s$. Nel punto di massima altezza la sua velocità è $6\ m/s$. Qual è stato l'angolo di lancio del proiettile? Spiega il procedimento.

$$v_o = 12\ m/s \qquad v = 6\ m/s \qquad \alpha?$$

Scompongo il moto del proiettile lungo due direzioni: la prima, parallela al suolo (asse x), è un moto rettilineo uniforme, mentre la seconda, perpendicolare al suolo (asse y), è un moto rettilineo uniformemente accelerato. La componente lungo l'asse y, quindi, può essere equiparata al moto di un oggetto lanciato verso l'alto: nel punto più alto la velocità sarà pari a zero. Questo significa che la velocità data nel punto di massima altezza è la componente orizzontale della velocità. In altre parole, posso riscrivere i dati in questo modo:

$$v = 12\ m/s \qquad v_x = 6\ m/s \qquad \alpha?$$

Dalla relazione tra il modulo della velocità e la sua componente, posso ricavare l'angolo: $v_x = v\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \cos^{-1}\frac{v_x}{v} = \mathbf{60°}$

2. Partendo da ferma, un'automobile si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione pari a $2{,}0\ m/s^2$ su una strada di collina inclinata di $5{,}5°$ sopra l'orizzontale. Se viaggia per 12 secondi, quale distanza percorre in direzione orizzontale? E in direzione verticale?

$$v_o = 0\ m/s \qquad a = 2{,}0\ m/s^2 \qquad \alpha = 5{,}50° \qquad \Delta t = 12\ s \qquad s_x? \qquad s_y?$$

Considero il moto lungo la strada: si tratta di un moto rettilineo uniformemente accelerato e la sua legge oraria è:

$$s = s_o + v_o\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{2}a\,(\Delta t)^2$$

Per determinare lo spostamento in direzione orizzontale e verticale, devo determinare le sue componenti:

$$s_x = s\cos\alpha = \frac{1}{2}a\,(\Delta t)^2\ \cos\alpha = \mathbf{1,4\cdot 10^2\ m} \qquad\qquad s_y = s\cos\alpha = \frac{1}{2}a\,(\Delta t)^2\sin\alpha = \mathbf{14\ m}$$

3. Un delfino salta con una velocità iniziale di modulo $11{,}0\ m/s$ e un angolo di $40°$ sopra l'orizzontale e passa attraverso il centro di un cerchio prima di rituffarsi nell'acqua. Se il delfino si muove orizzontalmente nell'istante in cui passa nel cerchio, qual è la distanza orizzontale tra il cerchio e il punto in cui il delfino ha spiccato il suo salto?

$$v_o = 11{,}0\ m/s \qquad \alpha = 40° \qquad s_{max}?$$

Il moto descritto è un moto parabolico e il delfino si muove solo orizzontalmente quando raggiunge l'altezza massima. Il moto parabolico è simmetrico: il tempo impiegato per raggiungere l'altezza massima a partire dal punto in cui ha spiccato il salto è uguale al tempo impiegato per tornare a terra a partire dall'altezza massima e posso determinare questo intervallo di tempo considerando solo la componente del moto perpendicolare al suolo: si tratta, in questo caso, di un moto rettilineo uniformemente accelerato e, nel punto di altezza massima, la componente verticale della velocità è nulla. Partendo, quindi, dalla legge oraria della velocità:

$$v = v_{oy} - g\Delta t \quad \Rightarrow \quad v_{oy} - g\Delta t = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{v_{oy}}{g} = \frac{v_o\sin\alpha}{g}$$

Posso determinare la distanza percorsa in orizzontale sostituendo il valore trovato nella legge oraria del moto rettilineo uniforme, corrispondente alla componente orizzontale del moto parabolico:

$$s_{max} = v_{ox}\Delta t = v_{ox}\frac{v_{oy}}{g} = \frac{v_o^2}{g}\cos\alpha\sin\alpha = \mathbf{6,07\ m}$$

4. Una pallina da tennis è colpita in modo tale che lascia la racchetta con una velocità di $4{,}87\ m/s$ nella direzione orizzontale. Quando la pallina colpisce il perimetro del campo è a una distanza orizzontale di $1{,}95\ m$ dalla racchetta. Calcola l'altezza della pallina nel momento in cui lascia la racchetta.

$$v_{ox} = 4{,}87\ m/s \qquad G = 1{,}95\ m \qquad h?$$

Conoscendo la gittata e la velocità orizzontale, posso determinare il tempo di volo, visto che nella direzione parallela al suolo la pallina si muove di moto rettilineo uniforme:

$$G = v_{ox}\Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{G}{v_{ox}}$$

Il moto nella direzione perpendicolare al suolo è uniformemente accelerato: praticamente è un moto di caduta, durante il quale la pallina copre l'altezza dalla racchetta al pavimento:

$$h = \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 = \frac{1}{2}g\left(\frac{G}{v_{ox}}\right)^2 = \mathbf{0,786\ m}$$

5. Un modellino di automobile si trova inizialmente a una distanza di $38\ cm$ dall'origine del sistema di riferimento con il vettore posizione che forma un angolo di $70°$ con la direzione positiva dell'asse x e al di sopra dell'asse. L'automobile si muove con queste leggi orarie:

$$x = x_o + (2{,}3\ cm/s)\ t \qquad y = y_o + (1{,}1\ cm/s)\ t + \frac{1}{2}(0{,}40\ cm/s^2)t^2$$

Determina il modulo del vettore posizione e del vettore velocità nell'istante $t = 5{,}9\ s$.

$$d = 38\ cm \qquad \alpha = 70° \qquad t_o = 0\ s \qquad t_1 = 5{,}9\ s \qquad s_1? \qquad v_1?$$

Dalle equazioni del moto date dal testo, deduco che il moto lungo l'asse x è un moto rettilineo uniforme e quello lungo l'asse y è rettilineo e uniformemente accelerato. Ricavo inoltre:

$$x_o = d\cos\alpha \qquad y_o = d\sin\alpha \qquad v_x = 2{,}3\ cm/s \qquad v_{oy} = 1{,}1\ cm/s \qquad a_y = 0{,}40\ cm/s^2$$

Sostituendo il tempo dato, posso determinare il modulo del vettore posizione:

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(d\cos\alpha + v_x t_1)^2 + \left(d\sin\alpha + v_{ox}t_1 + \frac{1}{2}a_y t_1^2\right)^2} = \mathbf{0{,}56\ m}$$

Determino il modulo del vettore velocità:

$$\begin{cases} v_x = v_{ox} \\ v_y = v_{oy} + at_1 \end{cases} \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_{ox}^2 + \left(v_{oy} + at_1\right)^2} = \mathbf{0{,}042\ m/s}$$

6. In una rimessa da fondocampo, il modulo della velocità iniziale è di $26{,}0\ m/s$ e forma un angolo di $45{,}0°$ con l'asse x. Trascurando la resistenza dell'aria, calcola:
   A. l'altezza massima a cui arriva il pallone
   B. il tempo di volo del pallone
   C. la gittata della rimessa da fondocampo trascurando la resistenza dell'aria.

$$v_o = 26{,}0\ m \qquad \alpha = 45{,}0° \qquad H? \qquad t_v? \qquad G?$$

A. Considero solo la componente perpendicolare al suolo (asse y) del moto: si tratta di moto rettilineo uniformemente accelerato. Nel punto più alto raggiunto, il pallone ha la componente y nulla, perciò posso determinare il tempo necessario per raggiungere il punto più alto.

$$\begin{cases} v = v_{oy} - gt \\ v = 0 \end{cases} \qquad t = \frac{v_{oy}}{g}$$

Posso determinare l'altezza massima, sostituendo il tempo così trovato nella legge oraria del moto:

$$H = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{v_{oy}^2}{g} - \frac{g}{2}\cdot\frac{v_{oy}^2}{g^2} = \frac{v_{oy}^2}{2g} = \frac{v_o^2\sin^2\alpha}{2g} = \mathbf{17{,}2\ m}$$

B. Il tempo totale di volo è il doppio del tempo necessario per raggiungere il punto più alto della traiettoria, per le simmetrie del moto parabolico:

$$t_v = \frac{2v_{oy}}{g} = \frac{2v_o}{g}\sin\alpha = \mathbf{3{,}75\ s}$$

C. Determino la gittata, sostituendo il tempo di volo nella legge oraria del moto rettilineo uniforme lungo l'asse x, ovvero nella componente del moto parallela al suolo:

$$G = v_{ox}t_v = \frac{2v_o^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha = \mathbf{68{,}9\ m}$$

7. Anna si trova su una giostra che ruota compiendo 5,5 giri al minuto. La velocità tangenziale di Anna è $1{,}0\ m/s$.
   A. Calcola la velocità angolare della giostra.
   B. Determina la distanza di Anna dal centro della giostra.

$$f = 5{,}5\ giri/min \qquad v = 1{,}0\ m/s \qquad \omega? \qquad r?$$

A. Determino la velocità angolare a partire dalla definizione e ricordando di convertire l'unità di misura della frequenza in hertz:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\cdot\frac{5{,}5}{60\ s} = \mathbf{0{,}58\ rad/s}$$

B. Ricordando la relazione tra velocità tangenziale e velocità angolare, posso determinare la distanza di Anna dal centro della giostra, ovvero il raggio della circonferenza:

$$v = \omega r \quad\Rightarrow\quad r = \frac{v}{\omega} = \mathbf{1{,}7\ m}$$