1. Considera la funzione $y=\frac{ax^2+x+b}{2x^2}$ e determina a e b in modo che abbia come asintoto orizzontale la retta di equazione $y=1$ e presenti un punto di flesso in $x=-9$.

Determino l'asintoto orizzontale: $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^2+x+b}{2x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^2}{2x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$$

Perciò, visti i dati: $\boldsymbol{a=2}$. La funzione diventa: $$y=\frac{2x^2+x+b}{2x^2}=1+\frac{x+b}{2x^2}$$

Determino la derivata prima della funzione: $$y'=\frac{x^2-2x\,(x+b)}{2x^4}=\frac{-x-2b}{2x^3}$$

A seconda del segno di b, la derivata prima ha segno positivo se: $-2b<x<0\ se\ b>0$ $\qquad 0<x<-2b\ se\ b<0$

Perciò il punto stazionario $x=-2b$ è necessariamente un massimo o un minimo, mentre $x=0$ non appartiene al dominio.

Determino la derivata seconda della funzione: $$y''=-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3-3x^2(x+2b)}{x^6}=\frac{-x+3x+6b}{2x^4}=\frac{x+3b}{x^4}$$

In questo caso, ho un cambio di concavità per $x=-3b$, che corrisponde all'ascissa del flesso: $-3b=-9 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{b=3}$

2. Determina per quali valori del parametro a la funzione $y=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{3}ax^3+\frac{3}{2}x^2$ è priva di punti di flesso.

Calcolo le derivate della funzione: $$y'=\frac{1}{3}x^3-ax^2+3x=\frac{1}{3}x(x^2-3ax+9) \qquad y''=x^2-2ax+3$$

La derivata seconda è sempre positiva (il coefficiente del termine di secondo grado è positivo) quando $\Delta\leq 0$, perciò: $$\frac{\Delta}{4}=a^2-3\leq 0 \quad\Rightarrow\quad -\sqrt{3}\leq a\leq\sqrt{3}$$

La derivata prima ha come soluzione $x=0$ e perché ammetta un flesso a tangente orizzontale deve avere come secondo fattore un quadrato, perciò: $$\Delta=9a^2-36=0 \quad\Rightarrow\quad a=\pm 2$$

Siccome le due soluzioni trovate sono esterne all'intervallo trovato, la funzione è priva di flesso se e solo se: $\boldsymbol{-\sqrt{3}\leq a\leq\sqrt{3}}$

3. Data la funzione $y=axe^{bx^2}$, determina a e b in modo che il suo grafico abbia un massimo nel punto di coordinate $(1;2)$.

Calcolo la derivata prima della funzione: $$f'(x)=ae^{bx^2}+ax\cdot 2bxe^{bx^2}=ae^{bx^2}(1+2bx^2)$$

Dato che $(1;2)$ appartiene alla funzione: $f(1)=2 \quad\Rightarrow\quad ae^b=2$

Dato che $(1;2)$ è un punto di massimo stazionario: $f'(1)=0 \quad\Rightarrow\quad ae^b(1+2b)=0$

Mettendo a sistema le due condizioni: $$\begin{cases} ae^b=2 \\ ae^b(1+2b)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\,(1+2b)=0 \\ ae^b=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=-\frac{1}{2} \\ \frac{a}{\sqrt{e}}=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{a=2\sqrt{e}} \\ \boldsymbol{b=-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

4. Dopo aver enunciato il teorema di Lagrange, stabilisci se alla funzione $f(x) = 2\sqrt{x} - x$ è applicabile nell'intervallo $[0; 1]$ e, in caso affermativo, determina i punti c di cui il teorema garantisce l'esistenza.

Se una funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo limitato e chiuso $[a; b]$, derivabile in ogni punto interno a esso, allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo per cui vale la relazione: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

$D_f = [0, +\infty)$ Perciò la funzione è continua nell'intervallo dato.

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$ La funzione è derivabile per l'intervallo aperto $(0; 1)$.

Determino il punto c: $\frac{1}{\sqrt{c}} - 1 = \frac{1-0}{1-0} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{c}} = 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{c} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{c = \frac{1}{4}}$

5. $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x - \sin x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x - \sin x} =^H \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{1 - \cos x} =^H \lim_{x\to 0} \frac{6x}{\sin x} = 6\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-1} = \mathbf{6}$$

6. $\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

$$\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x^2}\ln\cos x} =^H \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{-\tan x}{2x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{2\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{e}}}$$

7. $\lim_{x\to +\infty} x\left(e^{\frac{3}{x}} - 1\right)$

$$\lim_{x\to +\infty} x\left(e^{\frac{3}{x}} - 1\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(e^{\frac{3}{x}} - 1\right)}{\frac{1}{x}} =^H \lim_{x\to +\infty} \frac{-\frac{3}{x^2}\, e^{\frac{3}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = 3\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{3}{x}} = \mathbf{3}$$

8. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{1 - \cos x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{1 - \cos x} =^H \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos x^2}{\sin x} = \mathbf{2}$$

9. Verifica che, tra tutti i triangoli isosceli aventi perimetro assegnato, uguale a $2p$, quello di area massima è quello equilatero.

Il triangolo ABC, di base $\overline{AB} = 2x$, e lati obliqui $\overline{BC} = \overline{CA} = \frac{2p - 2x}{2} = p - x$

Perciò l'altezza CH relativa alla base è, per il teorema di Pitagora: $\overline{CH} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{BH}^2} = \sqrt{(p-x)^2 - x^2} = \sqrt{p^2 - 2px}$

Prevedibilmente, ricordando che x rappresenta la misura di un segmento, quindi è positivo, il radicando è positivo per $0 < x < \frac{p}{2}$

La funzione da ottimizzare è quella che rappresenta l'area: $f(x) = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CH} = x\sqrt{p^2 - 2px}$

Calcolo la derivata prima: $f'(x) = \sqrt{p^2 - 2px} + \frac{x}{2\sqrt{p^2 - 2px}} \cdot (-2p) = \frac{p^2 - 2px - px}{\sqrt{p^2 - 2px}} = \frac{p^2 - 3px}{\sqrt{p^2 - 2px}}$

Il denominatore è sempre positivo, perciò: $p^2 - 3px > 0 \quad \Rightarrow \quad p - 3x > 0 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{p}{3}$

Questo corrisponde ad un punto di massimo, e: $\boldsymbol{\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = \frac{2}{3}p}$

10. Sia ABC un triangolo isoscele di base $\overline{AB} = 6a$, i cui lati obliqui misurano $3a\sqrt{5}$. Determina il punto P, sull'altezza CH del triangolo relativa ad AB, per cui la somma delle distanze di P dai tre vertici del triangolo è minima.

Il triangolo ABC, di base $\overline{AB} = 6a$, e lati obliqui $\overline{BC} = \overline{CA} = 3a\sqrt{5}$, ha altezza relativa alla base $\overline{CH}$, ottenuta applicando il teorema di Pitagora:

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{BH}^2} = \sqrt{\left(3a\sqrt{5}\right)^2 - (3a)^2} = 6a$$

Dato che la funzione è data dalla somma delle distanze di P dai vertici del triangolo, $f(x) = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$

indico $\overline{PH} = x$, perciò: $\overline{PC} = \overline{CH} - \overline{PH} = 6a - x$

Dato che l'altezza del triangolo isoscele relativa alla base è anche asse della base: $\overline{PA} = \overline{PB}$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo AHP: $\overline{PA} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{PH}^2} = \sqrt{(3a)^2 + x^2} = \sqrt{9a^2 + x^2}$

La funzione è: $f(x) = 2\sqrt{9a^2 + x^2} + 6a - x$

Calcolo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{9a^2 + x^2}} - 1 = \frac{2x - \sqrt{9a^2 + x^2}}{\sqrt{9a^2 + x^2}}$$

Il denominatore è sempre positivo, perciò la derivata prima è positiva per: $2x > \sqrt{9a^2 + x^2}$

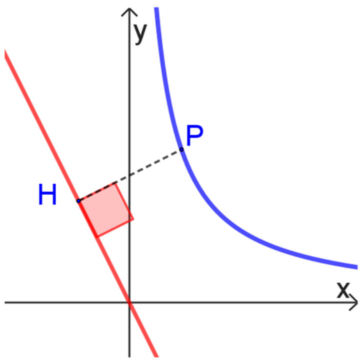
Trattandosi di quantità sicuramente positive, posso elevare al quadrato entrambi i membri: $4x^2 > 9a^2 + x^2$

Risolvendo e ricordando che $x > 0$:

$$\begin{cases} 3x^2 > 9a^2 \\ x > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < -a\sqrt{3} \quad \vee \quad x > a\sqrt{3} \\ x > 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad x > a\sqrt{3}$$

La somma delle distanze è minima quando: $\boldsymbol{\overline{PH} = a\sqrt{3}}$

11. Fra i punti di ascissa positiva appartenenti all'iperbole di equazione $xy = 4$, determina il punto P avente distanza minima dalla retta r di equazione $y = -2x$. Verifica che la tangente in P all'iperbole è parallela alla retta r.



Il punto P appartenente all'iperbole ha coordinate: $P\left(x; \frac{4}{x}\right)$. La sua distanza dalla retta r è data da:

$$d(P, r) = \frac{\left|2x + \frac{4}{x}\right|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{|x^2 + 2|}{|x|}$$

Posso togliere il valore assoluto, visto che P si trova nel primo quadrante e che a numeratore c'è una somma di quadrati, sicuramente positiva.
La funzione da studiare è:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

Calcolo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2\sqrt{5}}\,(x^2 - 2)$$

Posso studiarne il segno, ricordando che l'ascissa di P è positiva, visto che P si trova nel primo quadrante:

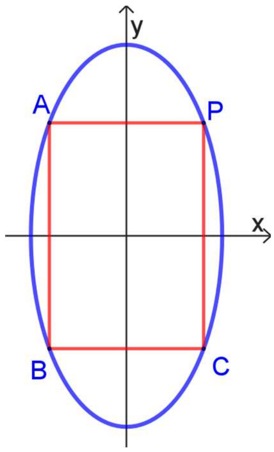
$$\begin{cases} x^2 - 2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < -\sqrt{2} \quad \vee \quad x > \sqrt{2} \\ x > 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad x > \sqrt{2}$$

$x = \sqrt{2}$ è un punto di minimo per la funzione e le coordinate di P sono: $\boldsymbol{P\left(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)}$

Per verificare che la tangente all'iperbole in P è parallela alla retta r, devo calcolare il coefficiente angolare della tangente all'iperbole in P, ovvero $g'(x_P)$ dove $g(x) = \frac{4}{x}$ è l'iperbole:

$$g'(x) = -\frac{4}{x^2} \quad \Rightarrow \quad g'\left(\sqrt{2}\right) = -\frac{4}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = -2$$

12. Tra tutti i rettangoli iscritti nell'ellisse di equazione $4x^2 + y^2 = 4$ e aventi i lati paralleli agli assi cartesiani, trova quello di area massima.



Il punto P del primo quadrante, appartenente all'ellisse, ha coordinate positive: $P\left(x; \sqrt{4-4x^2}\right)$.
Per simmetria, è possibile determinare le dimensioni del rettangolo inscritto:

$$\overline{AP} = 2x \qquad \overline{PC} = 2\sqrt{4-4x^2} = 4\sqrt{1-x^2}$$

La funzione da studiare è l'area del rettangolo:

$$f(x) = 8x\sqrt{1-x^2}$$

Calcolo la derivata prima:

$$f'(x) = 8\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{x\cdot(-x)}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{8}{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-x^2) = \frac{8}{\sqrt{1-x^2}}(1-2x^2)$$

Posso studiarne il segno, ricordando che l'ascissa di P è positiva, visto che ho scelto P nel primo quadrante:

$$\begin{cases} 1-2x^2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x > 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ è un punto di massimo per la funzione e le coordinate di P sono: $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right)$

E il rettangolo ha, quindi, dimensioni: $\boldsymbol{\overline{AP} = \sqrt{2}}$ $\boldsymbol{\overline{PC} = 2\sqrt{2}}$