



1. Determina, in forma algebrica, le soluzioni delle seguenti equazioni in campo complesso:

$$2z^2 - 1 - i\sqrt{3} = 0 \qquad z^6 + 1 = 0$$

A. Scrivo il quadrato del numero complesso da determinare in forma trigonometrica e poi estraggo la radice:

$$z^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \qquad z = \cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{2}$$

$$k = 0: z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \qquad k = 1: z_2 = \cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

B. Notando che $i^2 = -1$ e $i^6 = i^4 \cdot i^2 = (-1)^2 \cdot (-1) = -1$, posso scrivere l'equazione come $z^6 - i^6 = 0$ e procedere con la scomposizione del polinomio in differenza di quadrati e poi in somma e differenza di cubi. A quel punto posso applicare la legge di annullamento del prodotto e determinare le soluzioni:

$$(z^3 - i^3)(z^3 + i^3) = 0 \quad \Rightarrow \quad (z - i)(z^2 + iz - 1)(z + i)(z^2 - iz - 1) = 0$$

$$z_1 = i \qquad z_{2,3} = \frac{-i \pm \sqrt{3}}{2} \qquad z_4 = -i \qquad z_{5,6} = \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$$

2. Risolvi, nel campo dei numeri complessi, l'equazione $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^4 = 1$ e verifica che la somma delle soluzioni è zero.

Estraggo la radice quarta di 1, dopo averlo scritto in forma trigonometrica e poi risolvo le quattro equazioni:

$$1 = \cos 0 + i \sin 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[4]{1} = \cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}$$

$$k = 0: \sqrt[4]{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{z-i}{z+i} = 1 \quad \Rightarrow \quad z-i = z+i \quad \nexists z \in \mathbb{C}$$

$$k = 1: \sqrt[4]{1} = i \quad \Rightarrow \quad \frac{z-i}{z+i} = i \quad \Rightarrow \quad z-i = iz-1 \quad z(1-i) = -(1-i) \quad z_1 = -1$$

$$k = 2: \sqrt[4]{1} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{z-i}{z+i} = -1 \quad \Rightarrow \quad z-i = -z-i \quad 2z = 0 \quad z_2 = 0$$

$$k = 3: \sqrt[4]{1} = -i \quad \Rightarrow \quad \frac{z-i}{z+i} = -i \quad \Rightarrow \quad z-i = -iz+1 \quad z(1+i) = 1+i \quad z_3 = 1$$

La somma delle soluzioni è zero, dato che due sono opposte e una è nulla.

3. Dopo averlo scritto in forma algebrica, calcola il modulo del numero complesso $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ e verifica che $z^{10} = z$.

Scrivo il numero complesso in forma trigonometrica:

$$z = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)} = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad |z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$z^{10} = \left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)^{10} = \cos\left(\frac{20}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{20}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = z \quad c. v. d.$$

4. L'equazione $z^2 + (a + 5i)z + b(2 - i) = 0$ con a e b reali, ha soluzione $z_1 = 1 + 2i$. Trova a , b e l'altra soluzione z_2 dell'equazione.

Sostituisco la soluzione data nell'equazione per determinare i parametri reali richiesti:

$$(1 + 2i)^2 + (a + 5i)(1 + 2i) + 2b - ib = 0 \qquad 1 + 4i - 4 + a + 2ai + 5i - 10 + 2b - ib = 0$$

L'equazione mi dà un numero complesso nullo, che ha, quindi, entrambi i coefficienti nulli:

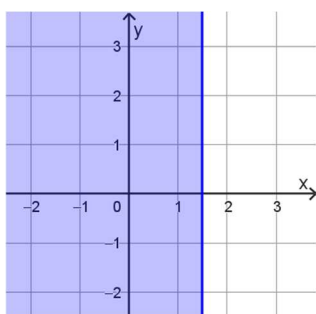
$$-13 + a + 2b + i(9 + 2a - b) = 0 \quad \begin{cases} -13 + a + 2b = 0 \\ 9 + 2a - b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 5a - 13 + 18 = 0 \\ b = 9 + 2a \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 7 \end{cases}$$

Conoscendo una soluzione dell'equazione di secondo grado, e sapendo che, in un'equazione di secondo grado, la somma delle soluzioni è data dall'opposto del rapporto tra il coefficiente del termine di primo grado e il coefficiente del termine di secondo grado, ricavo la seconda soluzione:

$$z^2 + (5i - 1)z + 14 - 7i = 0 \quad z_1 + z_2 = 1 - 5i \quad z_2 = 1 - 5i - z_1 = 1 - 5i - 1 - 2i = -7i$$

5. Rappresenta nel piano di Gauss i punti corrispondenti ai numeri complessi z che verificano la disequazione:

$$|z - 1| \leq |2 - z|$$



Posso scrivere il generico numero complesso come combinazione di ascisse e ordinate per rappresentarlo nel piano di Gauss: $z = x + iy$, dove l'ascissa rappresenta la parte reale e l'ordinata quella immaginaria. Perciò, applicando la definizione di modulo di un numero complesso, ottengo:

$$|(x - 1) + iy| \leq |(2 - x) - iy| \quad \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \leq \sqrt{(2 - x)^2 + y^2}$$

Posso passare al confronto dei radicandi, entrambi positivi in quanto somme di quadrati:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq 4 - 4x + x^2 + y^2 \quad x \leq \frac{3}{2}$$

6. Determina graficamente il numero delle soluzioni della seguente equazione parametrica nell'intervallo indicato, al variare del parametro in \mathbb{R} :

$$\begin{cases} 8 \sin x \cos x - 6 \sin^2 x = k \\ 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Semplifico l'equazione parametrica, usando le formule di duplicazione e bisezione:

$$4 \sin 2x - 6 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} = k \quad 4 \sin 2x - 3 + 3 \cos 2x = k$$

Il sistema diventa:

$$\begin{cases} 4 \sin 2x - 3 + 3 \cos 2x = k \\ 0 < 2x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 4Y + 3X = k + 3 \\ X^2 + Y^2 = 1 \\ 0 \leq X < 1; 0 < Y \leq 1 \end{cases}$$

Impongo il passaggio della retta per il punto $A(1,0)$:

$$0 + 3 = k + 3 \Rightarrow k = 0$$

Impongo il passaggio della retta per il punto $B(0,1)$:

$$4 + 0 = k + 3 \Rightarrow k = 1$$

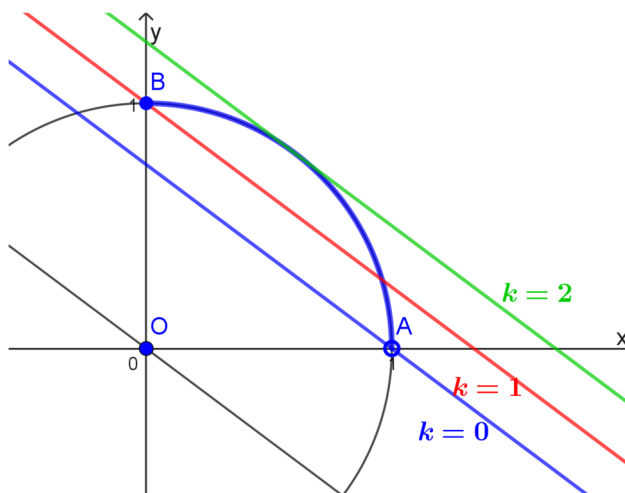
Determino la tangente, ponendo la distanza della generica retta del fascio dall'origine uguale al raggio:

$$\frac{|k + 3|}{5} = 1 \Rightarrow k = \pm 5 - 3$$

Visto l'andamento del fascio, la retta cercata avrà parametro positivo, perciò $k = 2$.

1 soluzione per $0 < k < 1$

2 soluzioni per $1 \leq k \leq 2$



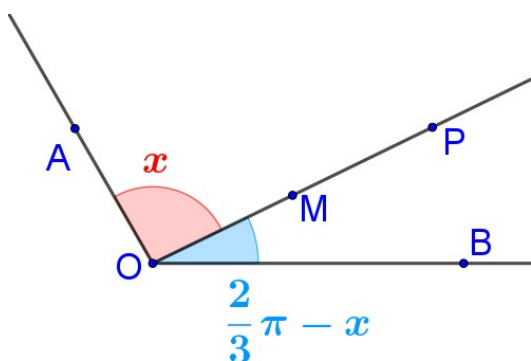
7. Sui lati OX e OY dell'angolo $X\hat{O}Y = \frac{2}{3}\pi$ considera rispettivamente i punti A e B tali che $\overline{OA} = a$ e $\overline{OB} = 2a$.

Detto P un punto interno all'angolo tale che $\overline{OP} = 2a$, posto $\widehat{AOP} = x$, determina il minimo della funzione:

$$f(x) = \overline{AP}^2 + 2\overline{AM}^2 + \overline{PB}^2$$

essendo M il punto medio di OP, e tracciane il grafico nei limiti imposti dal problema.

Nel caso in cui la somma è minima, determina perimetro e area del quadrilatero AOBP.



Per determinare la misura di \overline{AP} , considero il triangolo AOP, di cui conosco due lati e l'angolo tra essi compreso è quello indicato con x : applicando il teorema del coseno posso determinare quanto richiesto:

$$\overline{AP}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OP}^2 - 2 \cdot \overline{AO} \cdot \overline{OP} \cdot \cos x = 5a^2 - 4a^2 \cos x$$

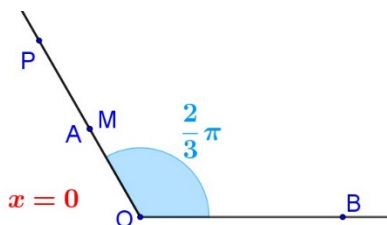
Per determinare la misura di \overline{AM} , considero il triangolo AOM, di cui conosco due lati e l'angolo tra essi compreso è quello indicato con x : applicando il teorema del coseno posso determinare quanto richiesto:

$$\overline{AM}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OM}^2 - 2 \cdot \overline{AO} \cdot \overline{OM} \cdot \cos x = 2a^2 - 2a^2 \cos x$$

Infine, per determinare la misura di \overline{PB} , considero il triangolo POB, di cui conosco due lati e l'angolo tra essi compreso è quello indicato con $\frac{2}{3}\pi - x$: applicando il teorema del coseno posso determinare quanto richiesto:

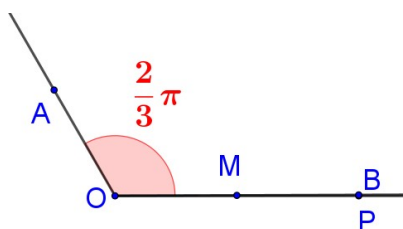
$$\overline{PB}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OB}^2 - 2 \cdot \overline{OP} \cdot \overline{OB} \cdot \cos\left(\frac{2}{3}\pi - x\right) = 8a^2 - 8a^2 \left(-\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x\right) = 8a^2 + 4a^2(\cos x - \sqrt{3} \sin x)$$

Prima di procedere, analizzo i casi limite:



$$A \equiv M \quad e \quad x = 0$$

$$f(x) = a^2 + 2 \cdot 0 + 8a^2 - 8a^2 \cdot \cos \frac{2}{3}\pi = 13a^2 \quad acc.$$



$$P \equiv B \quad e \quad x = \frac{2}{3}\pi$$

$$f(x) = 5a^2 - 4a^2 \cdot \cos \frac{2}{3}\pi + 2 \left(2a^2 - 2a^2 \cdot \cos \frac{2}{3}\pi\right) + 0 = 13a^2 \quad acc.$$

Perciò: $0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$. Determino ora l'espressione analitica della funzione:

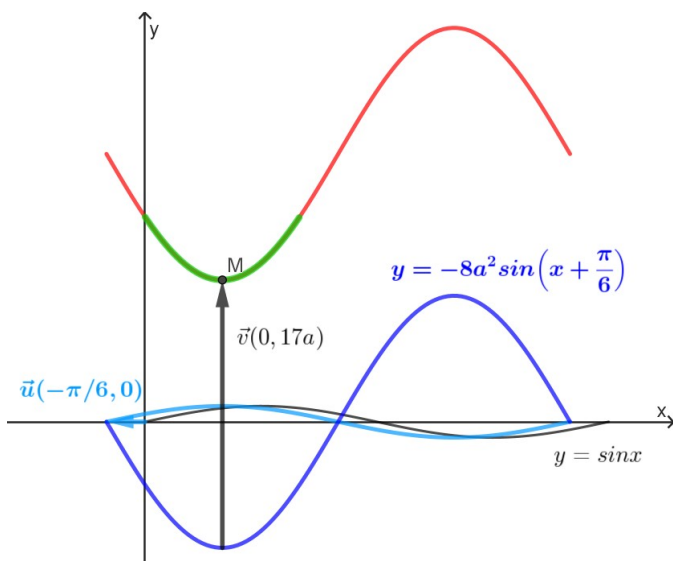
$$f(x) = 5a^2 - 4a^2 \cos x + 2(2a^2 - 2a^2 \cos x) + 8a^2 + 4a^2(\cos x - \sqrt{3} \sin x) =$$

$$= 17a^2 - 4a^2 \cos x - 4a^2 \cos x + 4a^2 \cos x - 4\sqrt{3}a^2 \sin x = 17a^2 - 4a^2(\sqrt{3} \sin x + \cos x) = 17a^2 - 8a^2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

L'espressione della funzione è:

$$f(x) = 17a^2 - 8a^2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \quad 0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$$

Rappresento la funzione nell'intervallo indicato:



Rappresento, in nero, la funzione $y = \sin x$.

Rappresento, in azzurro, la funzione traslata $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Dilato la funzione di un fattore $8a^2$ lungo l'asse y e ne faccio l'opposta, ottenendo: $y = -8a^2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Traslo la funzione di un vettore $\vec{v}(0, 17a)$, ottenendo la funzione rappresentata in rosso: $y = 17a^2 - 8a^2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

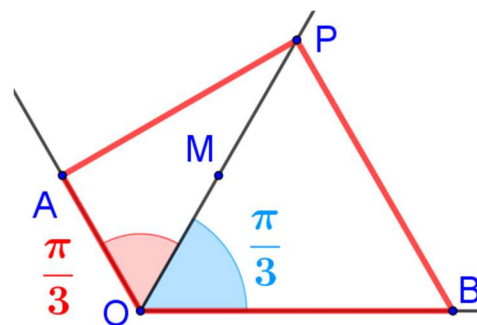
Di questa, considero solo l'intervallo evidenziato in verde, che è quello dato dai limiti del problema.

Nell'intervallo dato, è facile riconoscere il minimo, corrispondente a $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$, ovvero $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$.

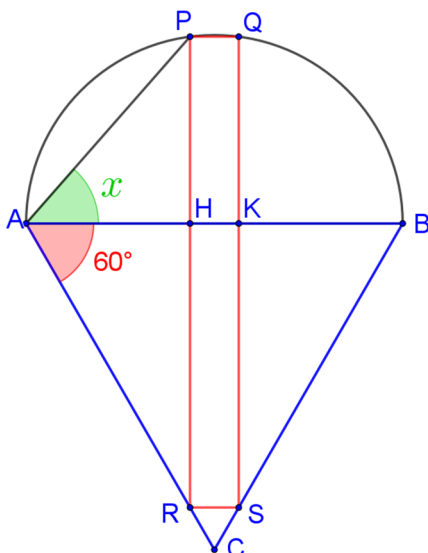
Nel punto di minimo della funzione, si viene a creare un trapezio rettangolo, dato dall'unione di un triangolo equilatero (OBP) e la metà di un triangolo equilatero (PAO). Mentre per il primo triangolo è facile capire che è equilatero, nel secondo caso $PB \parallel AO$, visto che formano angoli corrispondenti congruenti con la trasversale OB (quindi si tratta di un trapezio), inoltre il fatto che l'angolo $A\hat{O}M = 60^\circ$ e $\overline{PO} = 2\overline{OA}$, ci permette di dedurre che $P\hat{A}O = 90^\circ$, e quindi il trapezio è rettangolo. Ne determino perimetro e area:

$$2p = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{PB} + \overline{PA} = a + 2a + 2a + 2a \sin \frac{\pi}{3} = (5 + \sqrt{3}) a$$

$$\mathcal{A} = \frac{\overline{OA} + \overline{PB}}{2} \cdot \overline{PA} = \frac{a + 2a}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3} a^2$$



8. Si considerino la semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ e il triangolo equilatero ABC, situato da parte opposta alla semicirconferenza rispetto ad AB. Considera la corda PQ parallela al diametro e conduci per P e Q le perpendicolari ad AB, che incontrino in R ed S i lati AC e CB del triangolo, in modo che il perimetro del rettangolo PRSQ sia uguale a $2r(1 + \sqrt{3})$. (Poni $P\hat{A}B = x$).



Dato che il triangolo ABP è un triangolo rettangolo, in quanto l'ipotenusa AB coincide con il diametro, $\overline{AP} = 2r \cos x$. Anche il triangolo AHP è rettangolo, in H, perciò:

$$\overline{AH} = \overline{AP} \cos x = 2r \cos^2 x \quad \overline{PH} = \overline{AP} \sin x = 2r \sin x \cos x$$

Analogamente, dato che $P\hat{B}A = 90^\circ - x$:

$$\overline{PB} = 2r \sin x \quad \overline{BK} = \overline{PB} \cos(90^\circ - x) = 2r \sin^2 x$$

Dato che $\overline{AH} = \overline{KB}$:

$$\overline{HK} = \overline{BK} - \overline{KB} = \overline{BK} - \overline{AH} = 2r \sin^2 x - 2r \cos^2 x$$

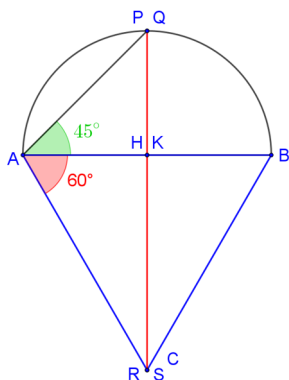
Il triangolo ARH è rettangolo in H, con l'angolo $H\hat{A}R = 60^\circ$, trattandosi dell'angolo di un triangolo equilatero:

$$\overline{HR} = \overline{AH} \tan 60^\circ = \sqrt{3} \overline{AH}$$

Il perimetro del rettangolo è:

$$f(x) = 2(\overline{HR} + \overline{HK} + \overline{PH}) = 4r(\sqrt{3} \cos^2 x + \sin^2 x - \cos^2 x + \cos x \sin x)$$

Prima di procedere, considero i casi limite:



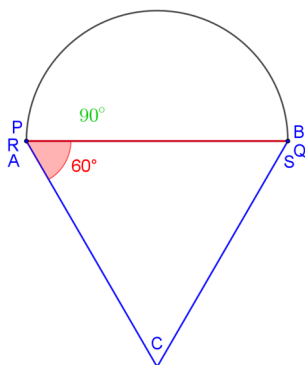
$$P \equiv Q \text{ e } R \equiv S \equiv C \Rightarrow x = 45^\circ: 2p_{PRSQ} = 2\overline{PR}$$

$$\overline{PH} = r \quad \overline{HR} = \overline{AR} \sin 60^\circ = r\sqrt{3} \Rightarrow 2\overline{PR} = 2r(1 + \sqrt{3})$$

Dato che:

$$2r(1 + \sqrt{3}) = 2r(1 + \sqrt{3})$$

$x = \frac{\pi}{4}$ è una delle soluzioni.



$$P \equiv R \equiv A \text{ e } B \equiv S \equiv Q \Rightarrow x = 90^\circ: 2p_{PRSQ} = 2\overline{AB}$$

Dato che: $2r(1 + \sqrt{3}) \neq 4r$, $x = \frac{\pi}{2}$ non è soluzione del problema.

Perciò: $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$. Determino ora l'equazione risolvente:

$$4r(\sqrt{3} \cos^2 x + \sin^2 x - \cos^2 x + \cos x \sin x) = 2r(1 + \sqrt{3})$$

$$2\sqrt{3} \cos^2 x + 2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x + 2 \cos x \sin x - \cos^2 x - \sin^2 x - \sqrt{3} \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x = 0$$

$$(1 - \sqrt{3}) \sin^2 x + 2 \cos x \sin x + (\sqrt{3} - 3) \cos^2 x = 0 \quad (1 - \sqrt{3}) \sin^2 x + 2 \cos x \sin x + \sqrt{3}(1 - \sqrt{3}) \cos^2 x = 0$$

Divido entrambi i membri per $1 - \sqrt{3}$ per semplificare i calcoli:

$$\sin^2 x + \frac{2}{1 - \sqrt{3}} \cos x \sin x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0$$

Dopo aver razionalizzato il coefficiente frazionario, divido per $\cos^2 x$, visto che, come mostrato nei casi limite, 90° non è soluzione del problema:

$$\tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \tan x + \sqrt{3} = 0 \quad \tan^2 x - \tan x - \sqrt{3} \tan x + \sqrt{3} = 0$$

$$\tan x (\tan x - 1) - \sqrt{3}(\tan x - 1) = 0 \quad (\tan x - 1)(\tan x - \sqrt{3}) = 0$$

Le soluzioni dell'equazione comprese dalle limitazioni del problema sono due:

$$\tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad \tan x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$