1. Determina, in forma algebrica, le soluzioni delle seguenti equazioni in campo complesso:

$$z^4 - 3z^2 - 4 = 0 \qquad z^6 + 64 = 0$$

A. Scompongo il polinomio, come trinomio notevole e poi applico la legge di annullamento del prodotto:

$$(z^2-4)(z^2+1)=0 \qquad \begin{matrix} z^2-4=0 & z_{1,2}=\pm 2 \\ z^2+1=0 & z_{3,4}=\pm i \end{matrix}$$

B. Notando che $i^2=-1$ e $i^6=i^4\cdot i^2=(-1)^2\cdot(-1)=-1$, posso scrivere l'equazione come $z^6-2^6i^6=0$ e procedere con la scomposizione del polinomio in differenza di quadrati e poi in somma e differenza di cubi. A quel punto posso applicare la legge di annullamento del prodotto e determinare le soluzioni:

$$(z^3-2^3i^3)(z^3+2^3i^3)=0 \qquad \Rightarrow \qquad (z-2i)(z^2+2iz-4)(z+2i)(z^2-2iz-4)=0$$

$$z_1=\mathbf{2i} \qquad z_{2,3}=-i\pm\sqrt{3} \qquad z_4=-2i \qquad z_{5,6}=i\pm\sqrt{3}$$

2. Se u, v, w sono tre numeri complessi, tali che: $\frac{1}{u}=\frac{1}{v}+\frac{1}{w}$ e $v=3+4i$ e $w=4-3i$, dopo aver trovato u nella forma algebrica, determina il modulo di $\frac{u}{v}$.

Procedo con il calcolo:

$$\frac{1}{u}=\frac{1}{3+4i}+\frac{1}{4-3i}=\frac{3-4i}{25}+\frac{4+3i}{25} \qquad \Rightarrow \qquad u=\frac{25}{7-i}\cdot\frac{7+i}{7+i}=\frac{25}{50}(7+i)=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}i$$

Determino il modulo richiesto:

$$\frac{u}{v}=\frac{7+i}{2(3+4i)}\cdot\frac{3-4i}{3-4i}=\frac{21-28i+3i+4}{2(9+16)}=\frac{25}{50}(1-i)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \qquad \left|\frac{u}{v}\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. Se $x+iy=(1+i)^n$ con $n\in\mathbb{N}_o$, dimostra che: $x^2+y^2=2^n$ (usa la forma trigonometrica).

Scrivo il numero complesso in forma trigonometrica: $x+iy=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^n=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Dalla precedente espressione posso ricavare: $x=\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) \qquad y=\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$

Procedo con il calcolo della somma di quadrati:

$$x^2+y^2=\left(\sqrt{2}\right)^{2n}\cos^2\left(n\frac{\pi}{4}\right)+\left(\sqrt{2}\right)^{2n}\sin^2\left(n\frac{\pi}{4}\right)=\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^n\left(\cos^2\left(n\frac{\pi}{4}\right)+\sin^2\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)=2^n \qquad c.v.d.$$

4. L'equazione $z^2+i\,z+a+10i=0$ ha soluzione $z_1=2+iy$, con a e y reali.
Trova a, y e l'altra soluzione z_2 dell'equazione.

Sostituisco la soluzione data nell'equazione per determinare i parametri reali richiesti:

$$(2+iy)^2+i(2+iy)+a+10i=0 \qquad 4+4iy-y^2+2i-y+a+10i=0$$

L'equazione mi dà un numero complesso nullo, che ha, quindi, entrambi i coefficienti nulli:

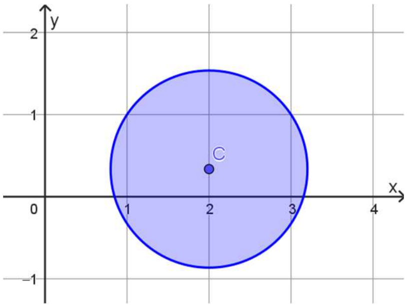
$$4-y^2-y+a+i(4y+12)=0 \qquad \begin{cases} 4y+12=0 \\ 4-y^2-y+a=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-3 \\ 4-9+3+a=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=2 \\ y=-3 \end{cases}$$

Conoscendo una soluzione dell'equazione di secondo grado, e sapendo che, in un'equazione di secondo grado, la somma delle soluzioni è data dall'opposto del rapporto tra il coefficiente del termine di primo grado e il coefficiente del termine di secondo grado, ricavo la seconda soluzione:

$$z^2+i\,z+2+10i=0 \qquad z_1+z_2=-i \qquad z_2=-i-z_1=-i-2+3i=-2+2i$$

5. Rappresenta nel piano di Gauss i punti corrispondenti ai numeri complessi z che verificano la disequazione:

$$|2z-3| \le |z+i|$$



Posso scrivere il generico numero complesso come combinazione di ascisse e ordinate per rappresentarlo nel piano di Gauss: $z = x + iy$, dove l'ascissa rappresenta la parte reale e l'ordinata quella immaginaria. Perciò, applicando la definizione di modulo di un numero complesso, ottengo:

$$|(2x-3)+2iy| \le |x+(y+1)i| \qquad \sqrt{(2x-3)^2+4y^2} \le \sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

Posso passare al confronto dei radicandi, entrambi positivi in quanto somme di quadrati:

$$4x^2-12x+9+4y^2 \le x^2+y^2+2y+1 \qquad 3x^2+3y^2-12x-2y+8 \le 0 \qquad \boldsymbol{x^2+y^2-4x-\frac{2}{3}y+\frac{8}{3} \le 0}$$

Si tratta di una circonferenza di centro $C\left(2, \frac{1}{3}\right)$ e raggio $r = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

6. Determina graficamente il numero delle soluzioni della seguente equazione parametrica nell'intervallo indicato, al variare del parametro in $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} k\sin x + \cos x - 2 + k = 0 \\ 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Il sistema diventa:

$$\begin{cases} kY + X - 2 + k = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \\ -1 \le X \le 1; 0 \le Y \le 1 \end{cases}$$

Si tratta di un fascio proprio: $k(Y+1)+(X-2)=0$ di centro $C(2; -1)$.

Impongo il passaggio della retta per il punto $A\ (-1,0)$:

$$-1-2+k=0 \quad \Rightarrow \quad k=3$$

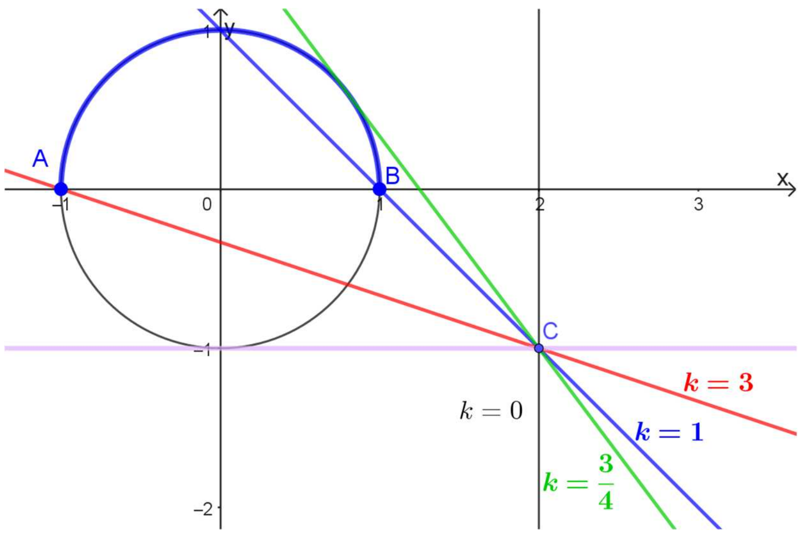
Impongo il passaggio della retta per il punto $B\ (1,0)$:

$$0+1-2+k=0 \quad \Rightarrow \quad k=1$$

Determino la tangente, ponendo la distanza della generica retta del fascio dall'origine uguale al raggio:

$$\frac{|-2+k|}{\sqrt{k^2+1}} = 1 \quad \Rightarrow \quad k^2+1 = k^2-4k+4$$

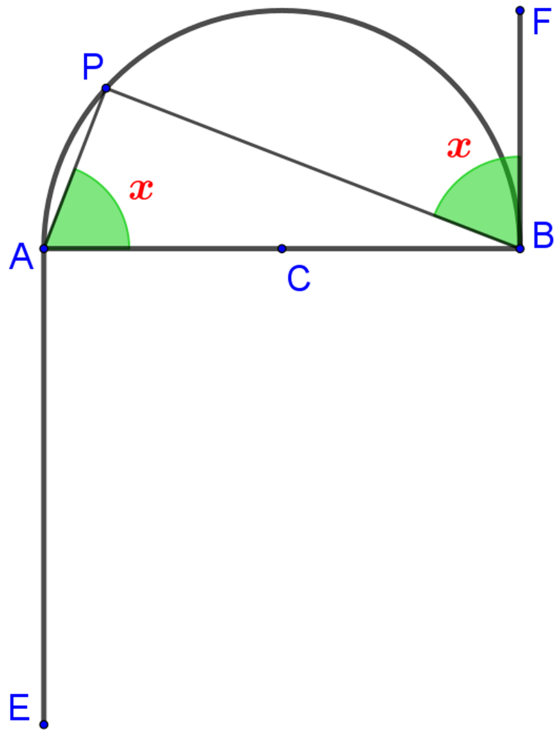
Visto l'andamento del fascio, la retta cercata avrà parametro $k = \frac{3}{4}$, mentre l'altra tangente non viene ottenuta per nessun valore del parametro.

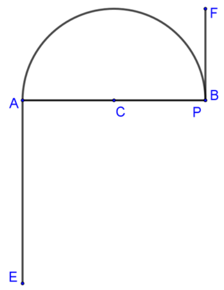


$$\boldsymbol{1\ soluzione\ per\ \ 1<k<3}$$

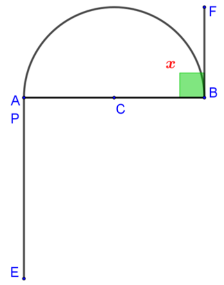
$$\boldsymbol{2\ soluzioni\ per\ \frac{3}{4} \le k \le 1}$$

7. Considerata la semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2$ e le tangenti in A e B, prendi su di esse, da parte opposta rispetto alla retta AB, due punti E ed F (F dalla stessa parte della semicirconferenza) tali che $\overline{AE} = 2$ e $\overline{BF} = 1$.
Posto $P\hat{B}F = x$, traccia la curva $y = \overline{PE}^2 + \overline{PF}^2$ nei limiti imposti dal problema.
Determina un punto P sulla semicirconferenza in modo che risulti massima la somma $\overline{PE}^2 + \overline{PF}^2$.
Calcola, nel caso in cui la somma è massima, il perimetro e l'area del quadrilatero AEBP.





$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P} \equiv \mathrm{B}$$
$$\overline{PE}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AE}^2 = 8$$
$$\overline{PF}^2 = 1$$
$$y = 8 + 1 = 9 \qquad acc.$$



$$x = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P} \equiv \mathrm{A}$$
$$\overline{PE}^2 = 4$$
$$\overline{PF}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{BF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BF}^2 = 5$$
$$y = 4 + 5 = 9 \qquad acc.$$

$$\boldsymbol{0 \le x \le \frac{\pi}{2}}$$

Posso determinare le distanze di P dagli estremi del diametro: $\overline{AP} = 2\cos x \qquad \overline{PB} = 2\sin x$

Determino la misura di $\overline{PE}$ applicando il teorema del coseno al triangolo EAP:

$$\overline{PE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AP}^2 - 2 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{AP} \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= 4 + 4\cos^2 x - 8\cos x\,(-\sin x) = 4 + 4\cos^2 x + 4\sin 2x$$

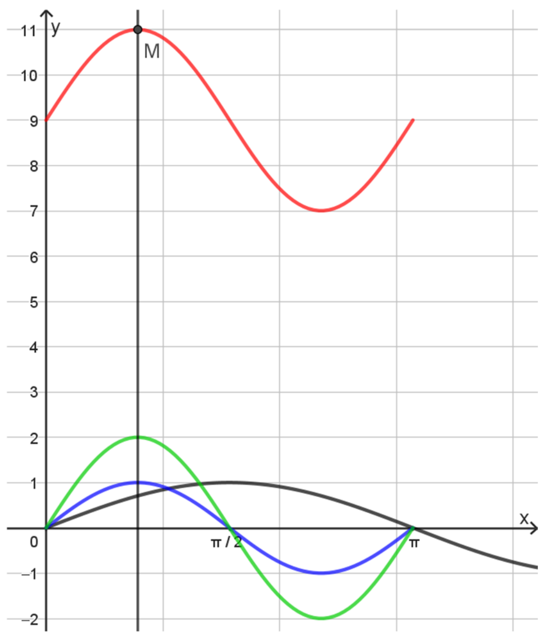
Determino la misura di $\overline{PF}$ applicando il teorema del coseno al triangolo PBF:

$$\overline{PF}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{BF}^2 - 2 \cdot \overline{PB} \cdot \overline{BF} \cdot \cos x =$$
$$= 4\sin^2 x + 1 - 4\sin x\cos x = 4\sin^2 x + 1 - 2\sin 2x$$

L'espressione della funzione è:

$$f(x) = 4 + 4\,cos^2 x + 4\,sin\,2x + 4\,sin^2 x + 1 - 2\,sin\,2x$$
$$\boldsymbol{f(x) = 9 + 2\,sin\,2x \qquad 0 \le 2x \le \pi}$$

Rappresento la funzione nell'intervallo indicato:



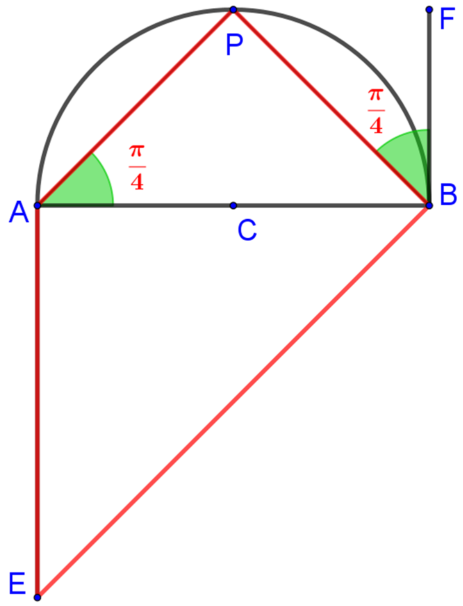
Rappresento, in nero, la funzione $y = \sin x$.

Rappresento, in blu, la funzione dilatata $\boldsymbol{y = sin\,2x}$.

Dilato la funzione di un fattore 2 lungo l'asse y, ottenendo: $\boldsymbol{y = 2\,sin\,2x}$.
Traslo la funzione di un vettore $\vec{v}\,(0, 9)$, ottenendo la funzione rappresentata in rosso: $\boldsymbol{y = 9 + 2\,sin\,2x}$.

Nell'intervallo dato, è facile riconoscere il massimo, corrispondente a $\sin 2x = 1$, ovvero $2x = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{4}}$ e $\overline{PF}^2 + \overline{PE}^2 = \boldsymbol{11}$.

Nel punto di massimo della funzione, si viene a creare un trapezio rettangolo, dato che il triangolo ABP è rettangolo isoscele, esattamente come il triangolo AEB e il diametro AB è l'ipotenusa per il triangolo ABP e il cateto per il triangolo AEB. Dalle relazioni precedenti, pur non avendo notato che si tratta di un trapezio rettangolo, posso determinarne perimetro e area:



$$\overline{AP} = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \qquad \overline{PB} = 2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

$$\overline{EB} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{AB}^2} = 2\sqrt{2}$$

$$2p = \overline{AP} + \overline{PB} + \overline{EB} + \overline{AE} = \sqrt{2} + \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2 = \mathbf{2(1 + 2\sqrt{2})}$$

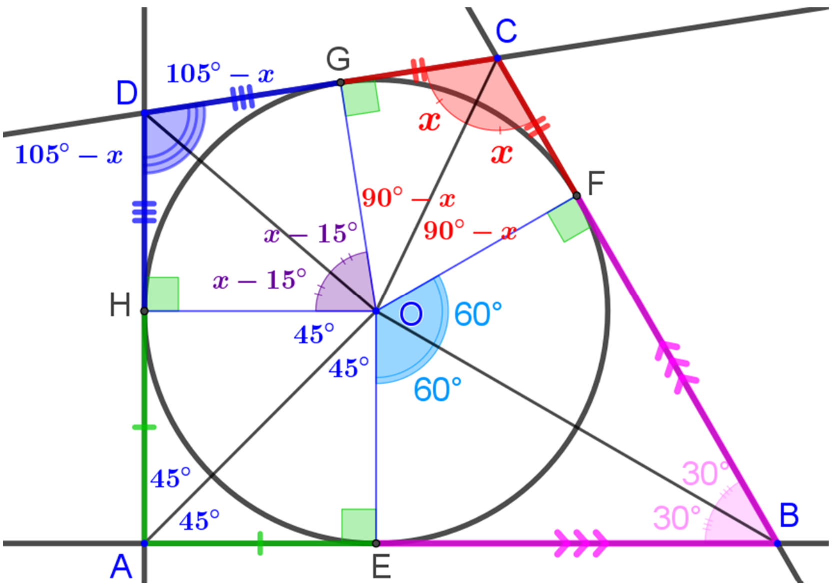
Per quanto riguarda l'area, se non ho riconosciuto il trapezio rettangolo, posso sommare le aree dei due triangoli rettangoli AEB e ABP:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\overline{AE}\cdot\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AP}\cdot\overline{PB} = \frac{2\cdot 2}{2} + \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} = \mathbf{3}$$

8. Sia ABCD un quadrilatero circoscritto a una circonferenza di centro O e raggio r tale che:

$$D\hat{A}B = \frac{\pi}{2} \qquad A\hat{B}C = \frac{\pi}{3}$$

Posto $B\hat{C}D = 2x$, costruisci un quadrilatero in modo che il suo perimetro sia uguale a $4r + \frac{8}{3}r\sqrt{3}$.



Come evidenziato dal disegno, si tratta di un'applicazione del teorema delle tangenti, dato che un quadrilatero circoscritto a una circonferenza risulta avere i lati tangenti alla stessa. Indico con E, F, G, H i punti di tangenza, rispettivamente dei lati AB, BC, CD e DA con la circonferenza. Come si evince dal disegno, i segmenti indicati sono a due a due congruenti, in quanto segmenti di tangenti condotti da punti esterni. Per lo stesso teorema, i segmenti che congiungono i vertici del quadrilatero con il centro della circonferenza sono bisettrici degli angoli del quadrilatero e anche dell'angolo che si forma nel centro della circonferenza. È, quindi, semplice, ricordando che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°, ricostruire tutte le misure degli angoli in funzione di x.

Il quadrilatero AEOH è un quadrato, perciò $\overline{AE} = \overline{EO} = \overline{OH} = \overline{HA} = r$.

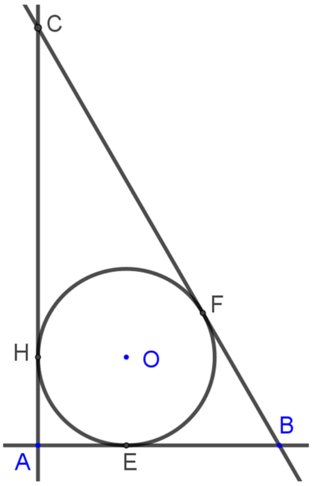
Nel triangolo rettangolo BOE: $\overline{EB} = \overline{EO}\tan 60° = r\sqrt{3}$. Perciò: $\overline{BF} = \overline{BE} = r\sqrt{3}$.

Nel triangolo rettangolo OFC: $\overline{CF} = \overline{OF}\cot x = \frac{r}{\tan x}$. Perciò: $\overline{CF} = \overline{CG} = \frac{r}{\tan x}$.

Nel triangolo rettangolo GDO: $\overline{GD} = \overline{OG}\tan(x - 15°)$. Perciò: $\overline{DH} = \overline{GD} = r\tan(x - 15°)$.

Ho bisogno di determinare la tangente dell'angolo di 15°:

$$\tan 15° = \frac{1 - \cos 30°}{\sin 30°} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) : \frac{1}{2} = 2 - \sqrt{3}$$



Dalle relazioni trovate, posso evincere che: $x > 15°$, dato che compare l'angolo $x - 15°$.
Se $B\hat{C}D = 30°$, con le misure date e considerato che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è 360°, otterrei: $C\hat{D}A = 180°$, il che renderebbe il quadrilatero ABCD un triangolo rettangolo ABC.

$$\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} = r + r\sqrt{3}$$

$$\overline{BC} = 2\,\overline{AB} \qquad \overline{AC} = \overline{AB}\tan 60° = \overline{AB}\,\sqrt{3}$$

$$2p = \overline{AB}(3+\sqrt{3}) = r\sqrt{3}\,(1+\sqrt{3})^2 \neq 4r + \frac{8}{3}r\sqrt{3}$$

Quindi: $x = \pi/12$ non è soluzione.

Inoltre, $x < 90°$, dato che compare l'angolo $90° - x$.

Se $B\hat{C}D = 180°$, il quadrilatero ABCD sarebbe un triangolo rettangolo ABD e la situazione sarebbe quella analizzata in precedenza, perciò $x = \frac{\pi}{2}$ non è soluzione.

Perciò: $\boldsymbol{\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{2}}$. Determino ora l'equazione risolvente:

$$2r + 2r\sqrt{3} + \frac{2r}{\tan x} + 2r\tan\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = 4r + \frac{8}{3}r\sqrt{3} \qquad \tan\left(x - \frac{\pi}{12}\right) + \frac{1}{\tan x} - 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0$$

Ricordando le formule di sottrazione della tangente:

$$\tan\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\tan x - \tan\frac{\pi}{12}}{1 + \tan x \tan\frac{\pi}{12}} = \frac{\tan x - 2 + \sqrt{3}}{1 + (2-\sqrt{3})\tan x}$$

$$\frac{\tan x - 2 + \sqrt{3}}{1 + (2-\sqrt{3})\tan x} + \frac{1}{\tan x} - 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0$$

$$3\tan^2 x - 6\tan x + 3\sqrt{3}\tan x + 3 + 6\tan x - 3\sqrt{3}\tan x - 3\tan x - 6\tan^2 x + 3\sqrt{3}\tan^2 x +$$
$$-\sqrt{3}\tan x - 2\sqrt{3}\tan^2 x + 3\tan^2 x = 0$$

$$\sqrt{3}\tan^2 x - 3\tan x - \sqrt{3}\tan x + 3 = 0 \qquad \sqrt{3}\tan x\,(\tan x - 1) - 3\,(\tan x - 1) = 0$$

$$(\tan x - 1)(\sqrt{3}\tan x - 3) = 0$$

Per la legge di annullamento del prodotto, ottengo due soluzioni:

$$\tan x = 1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{4}} \qquad\qquad \tan x = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{3}}$$

Entrambe le soluzioni sono accettabili.