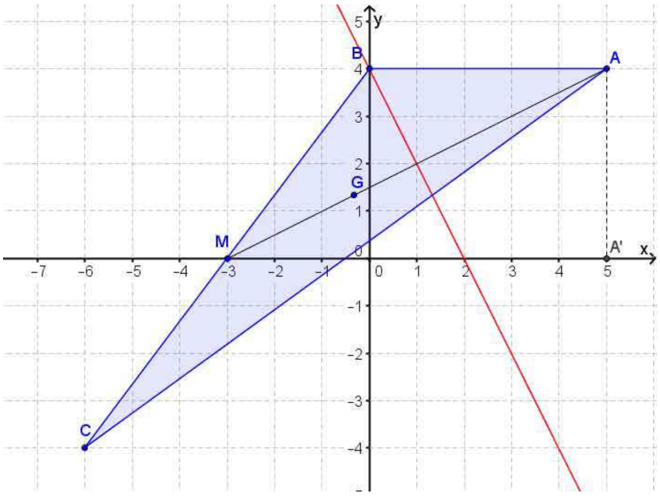
1. I punti A $(5, 4)$ e M $(-3, 0)$ sono gli estremi della mediana del triangolo ABC.
   a. Determina le coordinate del baricentro G del triangolo ABC.
   b. Sapendo che il vertice B è equidistante da A e da M e si trova sull'asse y, determina le coordinate dei due vertici B e C del triangolo.
   c. Calcola perimetro e area del triangolo ABC.

a. Il baricentro G divide la mediana in due parti e quella che contiene il vertice A è doppia rispetto a quella che contiene il punto medio M del lato BC. Considero quindi le proiezioni dei punti A, M e G sull'asse x, ovvero A', G' e M (visto che M si trova sull'asse x). Questi punti hanno coordinate $A'(5,0)$, $G'(x,0)$ e $M(-3,0)$. Per il teorema di Talete:



$$\overline{AG} : \overline{MG} = \overline{A'G'} : \overline{MG'}$$

Ovvero, per quanto detto prima:

$$2 : 1 = \overline{A'G'} : \overline{MG'}$$

Perciò:

$$2 \cdot \overline{MG'} = \overline{A'G'} \quad \Rightarrow \quad 2\,(x+3) = 5 - x$$
$$\Rightarrow \quad 3x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{3}$$

Analogamente, per l'ordinata avremo:

$$2\,(y-0) = 4 - y \quad \Rightarrow \quad 3y = 4 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4}{3}$$

Il baricentro del triangolo è $\boldsymbol{G\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)}$.

b. Essendo B equidistante da A e da M, B si trova sull'asse del segmento AM. Determino perciò l'equazione dell'asse, partendo dalla sua definizione come luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da due punti dati, ovvero dagli estremi del segmento:

$$\overline{AB}^2 = \overline{MB}^2 \quad \Rightarrow \quad (x-5)^2 + (y-4)^2 = (x+3)^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad 2x + y - 4 = 0$$

Metto a sistema l'equazione dell'asse del segmento AM con l'equazione dell'asse y, per determinare le coordinate di B:

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \qquad \boldsymbol{B(0,4)}$$

Essendo M il punto medio del segmento BC e conoscendo le coordinate di B, posso ricavare le coordinate di C con la formula inversa:

$$\begin{cases} \dfrac{x_B + x_C}{2} = x_M \\ \dfrac{y_B + y_C}{2} = y_M \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_C = 2x_M - x_B \\ y_C = 2y_M - y_B \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_C = -6 \\ y_C = -4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{C(-6,-4)}$$

c. Determino innanzi tutto la lunghezza del segmento AB:

$$\overline{AB} = |x_B - x_A| = 5$$

Siccome $\overline{AB} = \overline{BM}$ per ipotesi e $\overline{BM} = \overline{MC}$, in quanto M è unto medio del segmento BC, allora $\overline{BC} = 2\,\overline{AB} = 10$.

Determino quindi la lunghezza del segmento $\overline{AC}$.

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{11^2 + 8^2} = \sqrt{185}$$

Perciò: $2p = 5 + 10 + \sqrt{185} = \boldsymbol{15 + \sqrt{185}}$.

Per determinare l'area del triangolo, considero come base il segmento AB e come altezza la distanza di C da AB, perciò:

$$Area = \frac{\overline{AB} \cdot d\,(C;AB)}{2} = \frac{5 \cdot |-4-4|}{2} = \boldsymbol{20}$$

2. Siano dati i tre punti $A\ (4,1), T\ (-4,0)$ e $S\ (8,4)$.
   a. Determina le coordinate del punto B, simmetrico di A rispetto alla retta TS.
   b. Determina le coordinate del punto C, simmetrico di B rispetto all'asse y.
   c. Determina le coordinate del punto D, simmetrico di C rispetto alla bisettrice di primo e terzo quadrante.
   d. Verifica che il punto medio del segmento AD è il punto $N\ (4,-1)$.

a. Determino innanzi tutto l'equazione della retta TS:

$$\frac{x-x_S}{x_T-x_S}=\frac{y-y_S}{y_T-y_S} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-8}{-4-8}=\frac{y-4}{0-4} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-8}{3}=y-4 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$$

Ora determino l'equazione della retta perpendicolare alla retta TS e passante per il punto A:

$$y-y_A=-\frac{1}{m}(x-x_A)$$

dove m è il coefficiente angolare della retta passante per T e S:

$$y-1=-3(x-4) \quad \Rightarrow \quad y=-3x+13$$

Determino le coordinate di M, punto di intersezione tra la retta TS e della retta ad essa perpendicolare e passante per A:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3} \\ y=-3x+13 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{3}x+\frac{4}{3}=-3x+13 \\ y=-3x+13 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{7}{2} \\ y=\frac{5}{2} \end{cases} \qquad \boldsymbol{M\left(\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right)}$$

A questo punto, posso determinare facilmente le coordinate di B, che è il secondo estremo del segmento AB di cui M è il punto medio:

$$\begin{cases} \frac{x_B+x_A}{2}=x_M \\ \frac{y_B+y_A}{2}=y_M \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_B=2x_M-x_A \\ y_B=2y_M-y_A \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_B=3 \\ y_B=4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{B(3,4)}$$

b. Le equazioni della simmetria rispetto all'asse y ci permettono di determinare le coordinate di C:

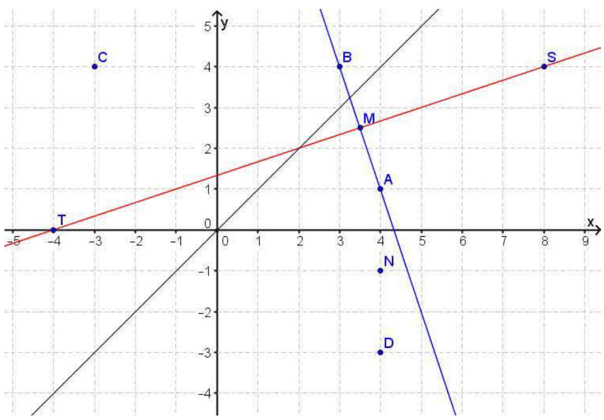
$$\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_C=-3 \\ y_C=4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{C(-3,4)}$$

c. Le equazioni della simmetria rispetto alla bisettrice di primo e terzo quadrante ci permettono di determinare le coordinate di D:

$$\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_D=4 \\ y_D=-3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{D(4,-3)}$$

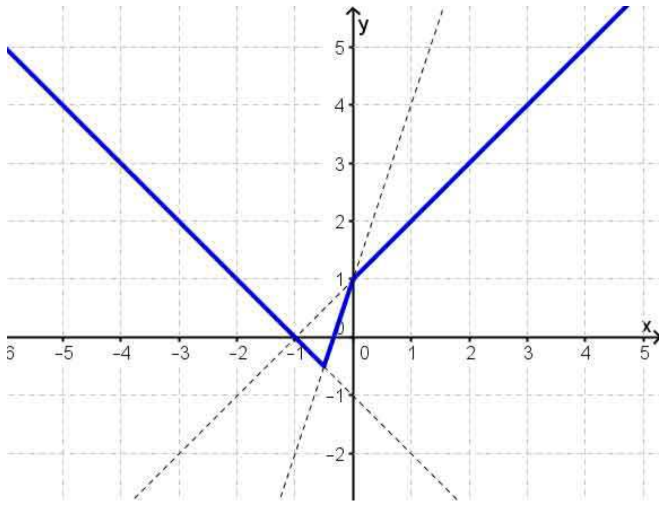
d. Determino le coordinate del punto medio del segmento AD e verifico che sono uguali a quelle indicate nel testo:

$$\begin{cases} \frac{x_D+x_A}{2}=x_M \\ \frac{y_D+y_A}{2}=y_M \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_M=4 \\ y_M=-1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{N(4,-1)}$$



3. Rappresenta graficamente la seguente funzione:

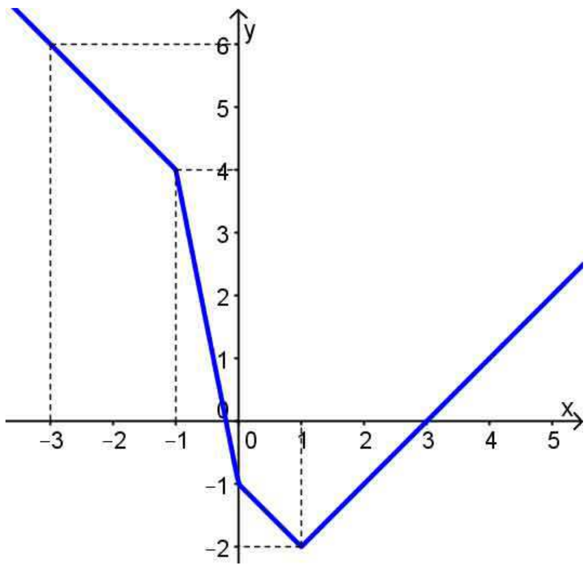
$$y = -|x| + |2x + 1|$$



Sono da considerare tre diverse situazioni:

$$y = \begin{cases} -x - 1 & se\ x < -\dfrac{1}{2} \\ 3x + 1 & se\ -\dfrac{1}{2} \leq x < 0 \\ x + 1 & se\ x \geq 0 \end{cases}$$

4. Esprimi analiticamente la funzione rappresentata dal seguente grafico:



Il primo tratto, per $x < -1$ intercetta l'asse y nel punto di ordinata 3 ed è parallela alla bisettrice di secondo e quarto quadrante, perciò:

$$\boldsymbol{y = -x + 3}$$

Il secondo tratto, per $-1 \leq x < 0$, intercetta l'asse y nel punto di ordinata – 1 ed ha coefficiente angolare – 5:

$$\boldsymbol{y = -5x - 1}$$

Il terzo tratto, per $0 \leq x < 1$, intercetta l'asse y nel punto di ordinata – 1 ed è parallela alla bisettrice di secondo e quarto quadrante, perciò:

$$\boldsymbol{y = -x - 1}$$

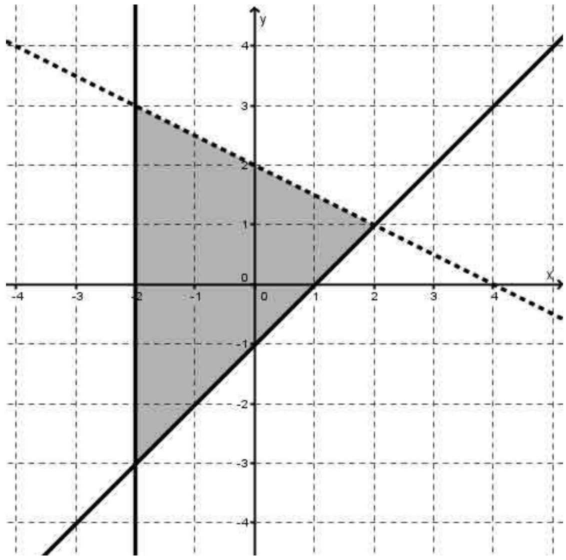
L'ultimo tratto, per $x \geq 1$, intercetta l'asse y nel punto di ordinata – 3 ed è parallela alla bisettrice di primo e terzo quadrante, perciò:

$$\boldsymbol{y = x - 3}$$

Riassumendo:

$$\boldsymbol{y = \begin{cases} -x + 3 & se\ x < -1 \\ -5x - 1 & se\ -1 \leq x < 0 \\ -x - 1 & se\ 0 \leq x < 1 \\ x - 3 & se\ x \geq 1 \end{cases}}$$

5. Scrivi un sistema di disequazioni le cui soluzioni sono i punti indicati nella figura.



La prima è la retta $x = -2$, che corrisponde alla regione: $x \geq -2$.

La seconda retta continua è parallela alla bisettrice di primo e terzo quadrante e intercetta l'asse y nel punto di ordinata – 1, perciò:

$$y = x - 1 \qquad\qquad x - y - 1 \leq 0$$

L'ultima retta ha coefficiente angolare – 1/2 e intercetta l'asse y nel punto di ordinata 2, perciò:

$$y = -\frac{1}{2}x + 2 \qquad\qquad x + 2y - 4 < 0$$

Il sistema è:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x \geq -2} \\ \boldsymbol{x - y - 1 \leq 0} \\ \boldsymbol{x + 2y - 4 < 0} \end{cases}$$