1. $x^2-4-(2x-1)(2x+1)\geq(1-3x)(1+3x)+6x^2$

$$x^2-4-(4x^2-1)\geq(1-9x^2)+6x^2$$

$$x^2-4-4x^2+1\geq 1-9x^2+6x^2 \quad\Longrightarrow\quad -4\geq 0 \qquad \boldsymbol{\nexists x\in\mathbb{R}}$$

2. $\frac{x+1}{15}-\frac{2\,(x-1)}{3}\geq-\frac{1}{2}x-\left(\frac{3}{5}-\frac{2-x}{10}\right)$

$$\frac{x+1}{15}-\frac{2\,(x-1)}{3}\geq-\frac{1}{2}x-\frac{3}{5}+\frac{2-x}{10}$$

$$\frac{2x+2-20\,(x-1)}{30}\geq\frac{-15x-18+6-3x}{30}$$

$$22\geq-12 \qquad \boldsymbol{\forall x\in\mathbb{R}}$$

3. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\leq(x+2)(x-2)-(x+1)(x-3)$

$$x^2+\frac{1}{4}-x-\left(x^2+\frac{1}{4}+x\right)\leq x^2-4-(x^2-3x+x-3)$$

$$x^2+\frac{1}{4}-x-x^2-\frac{1}{4}-x\ \leq x^2-4-x^2+3x-x+3$$

$$-4x\leq-1 \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{x\geq\frac{1}{4}}$$

4. $\frac{x-\frac{1}{2}}{3}+\frac{\frac{1}{3}-x}{2}>\frac{x}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$

$$\frac{x}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{x}{2}>\frac{x}{\frac{1}{6}}$$

$$\frac{x}{3}-\frac{x}{2}>6x$$

$$2x-3x-36x>0 \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{x<0}$$

5. $\frac{(x+2)(x-2)-x^2}{5x-5}\geq 0$

$$\frac{x^2-4-x^2}{5\,(x-1)}\geq 0$$

$$\frac{-4}{5\,(x-1)}\geq 0$$

$$\frac{1}{x-1}\leq 0 \quad\Longrightarrow\quad x-1<0 \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{x<1}$$

6. $x^3 + 5x^2 - 6x < 0$

$$x\,(x^2 + 5x - 6) < 0$$

$$x\,(x + 6)(x - 1) < 0$$

$1°F > 0: \quad x > 0$ $\qquad$ $2°F > 0: \quad x > -6$ $\qquad$ $3°F > 0: \quad x > 1$

	-6	0	1
–	–	+	+
–	+	+	+
–	–	–	+
–	+	–	+

$$\boldsymbol{x < -6 \quad \vee \quad 0 < x < 1}$$

7. $\frac{(x^2-6x+9)(x+5)(x^2+1)}{(x^2+x+1)(4x^2+9)} \geq 0$

Eliminando tutti i fattori positivi per qualsiasi valore di x, perché $x^2 - 6x + 9$ è un quadrato, $x^2 + 1$ e $4x^2 + 9$ somme di quadrati e $x^2 + x + 1$ perché falso quadrato, ottengo:

$$x + 5 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x \geq -5}$$

8. $\begin{cases} \frac{x^2+5x+25}{x^2+25} \leq 0 \\ \frac{(5x+4)(x-3)(2x+1)}{(x+6)(x+3)} < 0 \end{cases}$

Comincio con il risolvere la prima disequazione: il numeratore è un falso quadrato, il denominatore è una somma di quadrati, perciò la frazione è sicuramente positiva e non può essere nulla. Perciò la prima disequazione è impossibile.
Di conseguenza, l'intero sistema è impossibile.

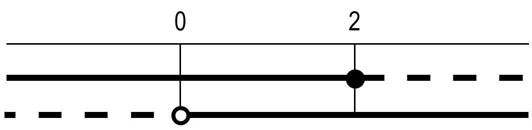
$$\boldsymbol{\nexists x \in \mathbb{R}}$$

9. $\begin{cases} -x^2 \leq (1-x)(x+2) \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)x + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right) > \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) \end{cases}$

Considero la disequazioni separatamente:

$$-x^2 \leq x + 2 - x^2 - 2x \quad \Longrightarrow \quad x \leq 2$$

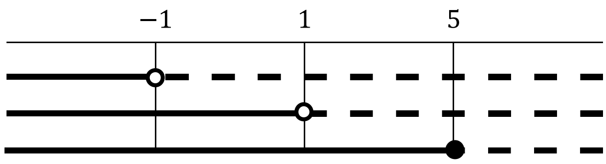
$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} > \frac{1}{3}x - \frac{1}{6} \quad \Longrightarrow \quad x + 3x - 2x > 0 \quad \Longrightarrow \quad x > 0$$



$$\boldsymbol{0 < x \leq 2}$$

10. $\begin{cases} x-1>2x \\ 2\,(3-x)>4x \\ x+1\geq -2\,(2-x) \end{cases}$

$$\begin{cases} x<-1 \\ x<1 \\ x\leq 5 \end{cases}$$



$$\boldsymbol{x<-1}$$

11. $ax>b+2$

Se $a>0$: $\boldsymbol{x>\frac{b+2}{a}}$

Se a <0: $\boldsymbol{x<\frac{b+2}{a}}$

Se $a=0$: $0x>b+2$ Se $b<-2$: $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$

Se $b\geq -2$: $\nexists \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$

12. $(a-1)\,x\geq a^2-1$

$$(a-1)\,x\geq (a-1)(a+1)$$

Se $a>1$: $\boldsymbol{x\geq a+1}$

Se $a<1$: $\boldsymbol{x\leq a+1}$

Se $a=1$: $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$