

1. Calcola il numero di abbinamenti possibili indicati di seguito:

- A. Tra tutti gli anagrammi della parola MATEMATICA, quanti sono quelli che cominciano con M e quanti quelli con MA?
 B. Si hanno 5 bandiere di colori diversi: quanti diversi segnali possiamo fare usando contemporaneamente 3 bandiere?
 C. Per aprire una cassaforte bisogna comporre una "parola d'ordine" di 5 lettere (anche senza significato) scelte fra le 21 dell'alfabeto. Quante diverse parole d'ordine possono essere composte?
 D. In quanti modi diversi possiamo distribuire 7 cioccolatini indistinguibili a 4 bambini diversi?
 E. Tra tutti i numeri di 10 cifre tutte diverse tra loro, quanti sono quelli le cui prime cinque cifre sono dispari?

- A. Nel primo caso, blocco la prima lettera con M, perciò ho 9 posizioni disponibili in cui posso avere due ripetizioni (quella della A e quella della T):

$$P_9^{(2,3)} = \frac{9!}{2! 3!} = \mathbf{30\ 240}$$

Nel secondo caso, blocco le prime due lettere, MA, perciò ho 8 posizioni disponibili in cui posso avere due ripetizioni (quella della A e quella della T):

$$P_8^{(2,2)} = \frac{8!}{2! 2!} = \mathbf{10\ 080}$$

- B. Si tratta di una disposizione semplice, visto che ho 3 posizioni a disposizione e 5 possibilità diverse di riempirle:

$$D_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \mathbf{60}$$

- C. Ho 21 lettere a disposizione e 5 posizioni diverse ed eventualmente le cifre si possono ripetere, perciò è una disposizione con ripetizione:

$$D'_{21,5} = 21^5 = \mathbf{4\ 084\ 101}$$

- D. Si tratta di una combinazione con ripetizione:

$$C'_{4,7} = \binom{10}{7} = \frac{10!}{7! 3!} = \mathbf{120}$$

- E. Si tratta di due permutazioni semplici distinte: la prima sulle prime 5 posizioni e la seconda sulle altre 5:

$$P_5 \cdot P_5 = 5! \cdot 5! = \mathbf{14\ 400}$$

2. Risolvi la disequazione: $\binom{x}{3} > \frac{15}{2} \binom{x}{2}$. [Esame di stato liceo scientifico, 2007 – Sessione suppletiva]

$$\frac{x!}{3!(x-3)!} > \frac{15}{2} \cdot \frac{x!}{2!(x-2)!} \quad C.A.: x \geq 3$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)!}{3!(x-3)!} > \frac{15}{2} \cdot \frac{x(x-1)(x-2)!}{2(x-2)!}$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{3!} > \frac{15}{2} \cdot \frac{x(x-1)}{2} \quad \text{posso semplificare } x(x-1) \text{ perché per le C.A.: } x \geq 3$$

$$\frac{x-2}{6} > \frac{15}{4} \quad 2x-4-45 > 0 \quad 2x > 49 \quad x > \frac{49}{2} \quad \mathbf{x \geq 25}$$

3. Risolvi l'equazione $12x! + 5(x+1)! = (x+2)!$

$$12x! + 5(x+1)x! = (x+2)(x+1)x! \quad C.A.: x \geq 0$$

$$12 + 5(x+1) = (x+2)(x+1)$$

$$12 + 5x + 5 = x^2 + 3x + 2$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \quad (x-5)(x+3) = 0$$

$$x = -3 \quad \text{non accett. per C.A.} \quad x = 5$$

4. Si estraggono contemporaneamente tre carte da un mazzo di 52. Calcola la probabilità di ottenere:

A. Tre carte dello stesso colore B. Tre carte dello stesso valore C. Almeno un asso

$$A. \quad p(\text{rosso} \cap \text{rosso} \cap \text{rosso}) + p(\text{nero} \cap \text{nero} \cap \text{nero}) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} + \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} = \frac{4}{17}$$

$$B. \quad p(1 \cap 1 \cap 1) \cdot 13 = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot 13 = \frac{1}{425}$$

$$C. \quad 1 - p(\bar{A} \cap \bar{A} \cap \bar{A}) = 1 - \frac{48}{52} \cdot \frac{47}{51} \cdot \frac{46}{50} = \frac{1201}{5525}$$

5. Un'urna contiene gettoni numerati da 1 a 60. Calcola la probabilità che, estraendo un gettone, esso presenti un numero divisibile per 2, oppure per 5, oppure per 7.

$$p(2) = \frac{30}{60} \quad p(5) = \frac{12}{60} \quad p(7) = \frac{8}{60} \quad p(2 \cap 5) = \frac{6}{60} \quad p(5 \cap 7) = \frac{1}{60} \quad p(2 \cap 7) = \frac{4}{60}$$

$$p(2 \cup 5 \cup 7) = p(2) + p(5) + p(7) - p(2 \cap 5) - p(5 \cap 7) - p(2 \cap 7) = \frac{30}{60} + \frac{12}{60} + \frac{8}{60} - \frac{6}{60} - \frac{1}{60} - \frac{4}{60} = \frac{13}{20}$$

6. Si lancia una moneta: se esce testa si estrae una carta da un mazzo di 40 carte, se esce croce si estrae una carta da un mazzo di 52 carte. Qual è la probabilità che la carta estratta sia un asso?

$$p(T) = \frac{1}{2} \quad p(C) = \frac{1}{2} \quad p(A|T) = \frac{4}{40} \quad p(A|C) = \frac{4}{52}$$

$$p(A) = p(A|T) p(T) + p(A|C) p(C) = \frac{4}{40} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{52} \cdot \frac{1}{2} = \frac{23}{260}$$

7. Per testare la validità di un farmaco lo si sperimenta su un campione di pazienti affetti da una certa malattia. Al 75% dei pazienti viene somministrato il farmaco, mentre al 25% viene somministrato un placebo, ossia una sostanza priva di proprietà farmacologiche (i pazienti non sono informati se stanno assumendo il farmaco o il placebo). Al termine del periodo di somministrazione sono guariti l'80% dei pazienti a cui è stato somministrato il farmaco e il 10% dei pazienti a cui è stato somministrato il placebo. Se un paziente è guarito, qual è la probabilità che gli sia stato somministrato il farmaco?

$$p(F) = \frac{75}{100} \quad p(\bar{F}) = \frac{25}{100} \quad p(G|F) = \frac{80}{100} \quad p(G|\bar{F}) = \frac{10}{100}$$

Per la soluzione uso la formula di Bayes:

$$p(F|G) = \frac{p(G|F)p(F)}{p(G|F)p(F) + p(G|\bar{F})p(\bar{F})} = \frac{\frac{80}{100} \cdot \frac{75}{100}}{\frac{80}{100} \cdot \frac{75}{100} + \frac{10}{100} \cdot \frac{25}{100}} = \frac{24}{24 + 1} = \frac{24}{25} = 96\%$$