

Calcola il valore delle seguenti espressioni:

$$1. \frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}}{12}$$

$$\frac{\sqrt{(\sqrt{3}+2)^2} - \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{12} = \frac{\sqrt{3}+2 - \sqrt{3}+1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$2. (\sqrt{6}-1)\sqrt{7+2\sqrt{6}} - \sqrt{6-\sqrt{11}} \cdot \sqrt{6+\sqrt{11}}$$

$$\sqrt{6+1-2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7+2\sqrt{6}} - \sqrt{36-11} = \sqrt{7-2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7+2\sqrt{6}} - \sqrt{25} = \sqrt{49-24} - 5 = 5 - 5 = 0$$

$$3. \sqrt{x-1} \cdot \sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt[9]{\frac{1}{(1-x)^5}} : \sqrt[18]{(x-1)^5}$$

$$C.E.: \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 1-x \neq 0 \end{cases} \quad x > 1$$

$$(x-1)^{\frac{1}{2}} \cdot (x-1)^{\frac{1}{3}} \cdot (-x-1)^{-\frac{5}{9}} : (x-1)^{\frac{5}{18}} = -(x-1)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{5}{9} - \frac{5}{18}} = -(x-1)^{\frac{9+6-10-5}{18}} = -(x-1)^0 = -1$$

$$4. \frac{(2\sqrt{2}-1)^2 + (2-\sqrt{2})^2 + 1}{(2-\sqrt{2})^2}$$

$$\frac{8 - 4\sqrt{2} + 1 + 4 - 4\sqrt{2} + 2 + 1}{4 + 2 - 4\sqrt{2}} = \frac{16 - 8\sqrt{2}}{6 - 4\sqrt{2}} = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} \cdot \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} = 24 + 16\sqrt{2} - 12\sqrt{2} - 16 = 8 + 4\sqrt{2}$$

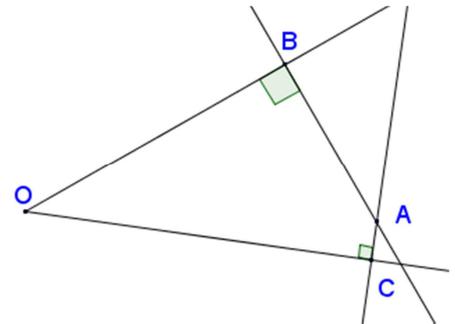
5. È dato un angolo convesso di vertice O. Da un suo punto A qualunque conduci i segmenti AB e AC perpendicolari ai lati dell'angolo. Dimostra che il quadrilatero ABOC è inscrittibile in una circonferenza e determina qual è il diametro di questa circonferenza..

$$\text{Hp: } \begin{array}{ll} r \cap s = \{O\} & C \in r \\ A \in r \hat{O} s & AB \perp s \\ AC \perp r & B \in s \end{array}$$

Ts: OCAB inscrittibile in una circonferenza

Dimostrazione:

I due angoli OCA e ABO sono retti. Pertanto, congiungendo O con A, otteniamo due triangoli rettangoli con l'ipotenusa in comune. La circonferenza circoscritta al quadrilatero è quella circoscritta ai due triangoli e ha per diametro proprio l'ipotenusa OA.



6. In una circonferenza di centro O è data una corda AB la cui lunghezza è $\frac{8}{3}$ della sua distanza dal centro; si sa inoltre che, detta OH tale distanza, è verificata la relazione tra le seguenti lunghezze:

$$\frac{5}{6} AH + \frac{4}{9} OH = 14 \text{ dm}$$

Determina il raggio della circonferenza.

Posto $\overline{OH} = x$, $\overline{AB} = \frac{8}{3}x$, e sapendo che AH è la metà di AB, visto che OH è perpendicolare alla corda e passa per il centro, la relazione data diventa:

$$\begin{aligned} \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{3}x \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{9}x &= 14 \\ \frac{10}{9}x + \frac{4}{9}x &= 14 \quad x = 9 \end{aligned}$$

Perciò: $\overline{OH} = 9 \text{ dm}$ e $\overline{AB} = 24 \text{ dm}$.

Possiamo quindi determinare la lunghezza del raggio usando il teorema di Pitagora per il triangolo OHA:

$$\overline{OA} = \sqrt{\overline{OH}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{\overline{OH}^2 + \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2} = \mathbf{15 \text{ dm}}$$

