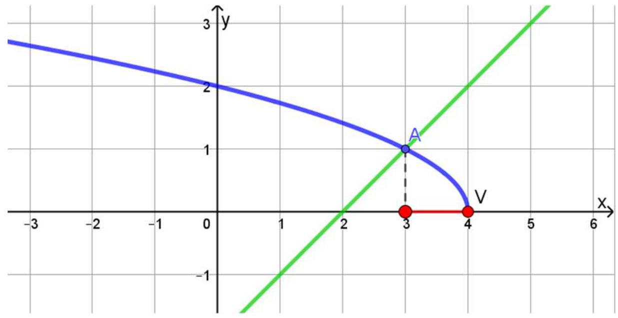
1. Risolvi graficamente la disequazione: $\sqrt{4-x} < x-2$.

Considero l'arco di parabola e la retta di equazione, rispettivamente:



$$y = \sqrt{4-x} \qquad\qquad y = x-2$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ y^2 = \left(\sqrt{4-x}\right)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y \geq 0 \\ x \leq 4 \\ x = -y^2+4 \end{cases}$$

L'arco di parabola è dato dalla parabola di vertice $V\ (4;0)$, con asse di simmetria coincidente con l'asse x, con concavità rivolta nel verso negativo dell'asse x, ma ne considero solo la parte superiore.

Per quanto riguarda la retta, si tratta di una retta parallela alla bisettrice di primo e terzo quadrante e passante per il punto $(0,-2)$.

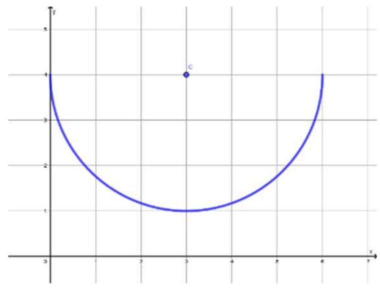
Dopo aver rappresentato anche la retta, determino il punto di intersezione che ha ascissa 3. La soluzione è indicata in rosso nel disegno:

$$\boldsymbol{3 < x \leq 4}$$

2. Rappresenta due delle seguenti curve (a tua scelta):

$$y = 4-\sqrt{6x-x^2} \qquad y = -\sqrt{|x|} \qquad y = x^2-2|x|+1 \qquad y = |x^2-4|$$

$$y = 4-\sqrt{6x-x^2}$$

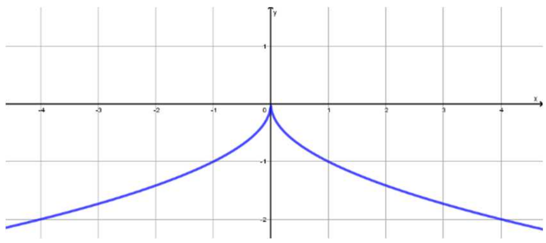


Semicirconferenza di centro $C(3;4)$ e raggio 3, di cui considero solo la parte inferiore, ovvero:

$$\begin{cases} y \leq 4 \\ (y-4)^2 = 6x-x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y \leq 4 \\ x^2+y^2-6x-8y+16=0 \end{cases}$$

$$r = \sqrt{9+16-16} = 3$$

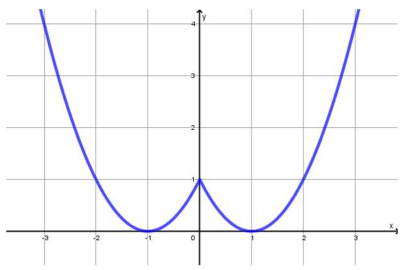
$$y = -\sqrt{|x|}$$



Si tratta di due archi di parabola, entrambi con asse coincidente con l'asse x e vertice nell'origine:

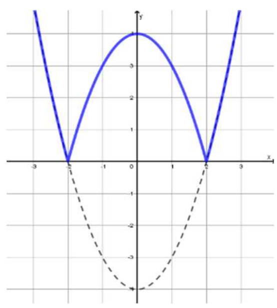
$$\begin{cases} y \leq 0 \\ y^2 = |x| \end{cases} \qquad \begin{cases} y \leq 0 \\ x = \pm y^2 \end{cases}$$

$$y = x^2-2|x|+1$$



Si tratta dell'unione di due archi di parabola, uno – quello nel primo quadrante – di vertice $(1;0)$, l'altro – quello nel secondo quadrante – di vertice $(-1;0)$, entrambi tangente all'asse delle ascisse:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y = x^2-2x+1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ y = x^2+2x+1 \end{cases}$$

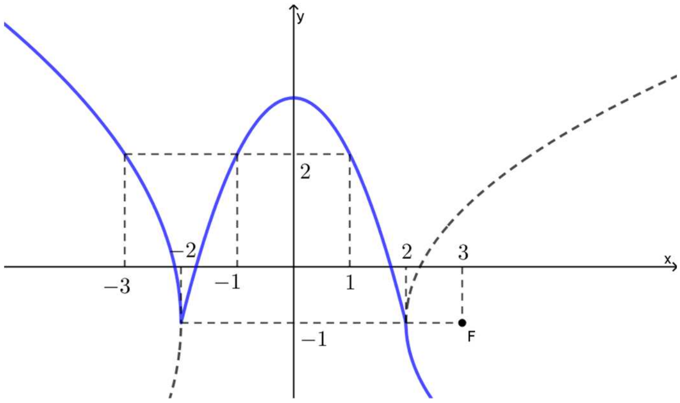


$$y = |x^2-4|$$

Rappresento la parabola di vertice $(0;\ -4)$ e con asse di simmetria coincidente con l'asse y e poi faccio la simmetrica della parte nel semipiano $y < 0$ rispetto all'asse x.

3. Trova l'equazione del grafico della figura 1.

La prima parte del grafico è una parabola, con asse parallelo all'asse y, di vertice $V\ (-2;\ -1)$ e passante per il punto $(-3; 2)$:



$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = -1 \\ -2 = a - b + c \\ -3 = 4a + 2b + c \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 2a \\ -2 = a - b + c \\ -1 = 3a + 3b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2a \\ c = a - 2 \\ 9a = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\dfrac{1}{9} \\ b = -\dfrac{2}{9} \\ c = -\dfrac{19}{9} \end{cases}$$

$$x = -\frac{1}{9}y^2 - \frac{2}{9}y - \frac{19}{9} \qquad -9x = y^2 + 2y + 19 \qquad (y+1)^2 = 9(-x-2)$$

$$\boldsymbol{y = -1 + 3\sqrt{-x-2} \qquad se\ x \le -2}$$

La seconda parte del grafico è una parabola con asse di simmetria coincidente con l'asse y (perciò $b = 0$) e passante per i punti $(-2, -1)$ e $(-1; 2)$:

$$\begin{cases} -1 = 4a + c \\ 2 = a + c \end{cases} \qquad \begin{cases} 3a = -3 \\ c = 2 - a \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -1 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{y = -x^2 + 3 \qquad se - 2 < x \le 2}$$

La terza parte del grafico è una parabola con asse parallelo all'asse x, con vertice in $(2; -1)$ e con fuoco di coordinate $(3;\ -1)$. Perciò:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = -1 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = 2 \\ \dfrac{1-\Delta}{4a} = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 2a \\ \Delta = -8a \\ 1 + 8a = 12a \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} - c = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

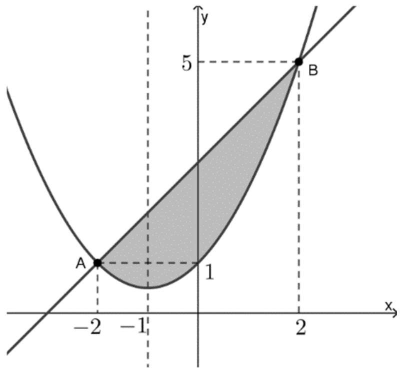
$$x = \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{9}{4} \qquad 4x = y^2 + 2y + 9 \qquad y^2 + 2y + 1 = 4x - 8 \qquad (y+1)^2 = 4x - 8$$

$$\boldsymbol{y = -1 - 2\sqrt{x-2} \qquad se\ x > 2}$$

Riassumendo:

$$\boldsymbol{y = \begin{cases} -1 + 3\sqrt{-x-2} & se\ x \le -2 \\ -x^2 + 3 & se - 2 < x \le 2 \\ -1 - 2\sqrt{x-2} & se\ x > 2 \end{cases}}$$

4. In figura 2 è rappresentato un segmento parabolico di base AB.
   A. Determina l'equazione della parabola.
   B. Determina l'area del segmento parabolico.
   C. Fra tutti i triangoli ABC inscritti nel segmento parabolico, determina quello di area 2.



A. Trovo l'equazione della parabola, sapendo che ha asse di simmetria $x=-1$ e passa per i punti $A\ (-2;1)$ e $B\ (2;5)$:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=-1 \\ 1=4a-2b+c \\ 5=4a+2b+c \end{cases} \qquad \begin{cases} b=2a \\ c=1 \\ 8a=5-c \end{cases} \qquad \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x^2+x+1}$$

B. Determino ora la retta, sapendo che passa per i punti $A\ (-2;1)$ e $B\ (2;5)$:

$$\frac{x+2}{2+2}=\frac{y-1}{5-1} \qquad x+2=y-1 \qquad y=x+3$$

Per calcolare l'area del segmento parabolico, devo determinare la retta parallela alla retta AB e tangente alla parabola. Metto quindi a sistema l'equazione della parabola con l'equazione del fascio di rette parallele e pongo $\Delta=0$ nella risolvente:

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x^2+x+1 \\ y=x+q \end{cases} \qquad \frac{1}{2}x^2+x+1=x+q \qquad x^2+2-2q=0 \qquad \Delta=-4(2-2q)=0 \qquad q=1$$

Calcolo la distanza del punto A dalla retta $r\colon y=x+1$, determino la misura del segmento $\overline{AB}$ e poi posso calcolare l'area del rettangolo:

$$h=d(A;r)=\frac{|-2-1+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \qquad \overline{AB}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2} \qquad Area=h\cdot\overline{AB}=8$$

L'area del segmento parabolico è $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo, perciò: $Area=\frac{2}{3}\cdot 8=\boldsymbol{\frac{16}{3}}$.

C. Considero il punto C di generiche coordinate $C\left(x;\frac{1}{2}x^2+x+1\right)$ e determino la sua distanza dalla retta passante per i punti A e B:

$$d(C;AB)=\frac{\left|\frac{1}{2}x^2+x+1-x-3\right|}{\sqrt{2}}=\frac{|x^2-4|}{2\sqrt{2}} \qquad Area=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{|x^2-4|}{2\sqrt{2}}=2$$

Ovvero dobbiamo risolvere le equazioni: $x^2-4=\pm 2$.

La prima equazione: $x^2-4=2$ $\quad x^2=6$ dà due soluzioni che sono esterne all'arco di parabola considerato.

La seconda equazione: $x^2-4=-2$ $\quad x^2=2$ dà due soluzioni accettabili:

$$\boldsymbol{C_1\left(-\sqrt{2};2-\sqrt{2}\right) \qquad C_2\left(\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right)}$$

5. Sia dato il fascio di parabole di equazione $y(2+k)-x^2(k+1)+2kx+4=0$. Dopo averlo studiato, determina il valore del parametro k per il quale la parabola:
   A. incontra l'asse y in un punto che ha distanza 3 dall'origine;
   B. ha il vertice sulla retta $3x-y-2=0$;
   C. ha direttrice di equazione $y=-\frac{3}{4}$.

Determino innanzi tutto le generatrici:

$$k(y-x^2+2x)+2y-x^2+4=0$$

$$y=x^2-2x \qquad y=\frac{1}{2}x^2-2$$

Cerco gli eventuali punti base mettendo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} y=x^2-2x \\ y=\frac{1}{2}x^2-2 \end{cases} \qquad x^2-2x=\frac{1}{2}x^2-2 \qquad x^2-4x+4=0 \qquad x=2 \qquad P\ (2;0)$$

Determino le parabole degeneri:

- $k=-2$ $\quad x^2-4x+4=0$ $\quad (x-2)^2=0$
- $k=-1$ $\quad y-2x+4=0$ $\quad y=2x-4$

Si tratta quindi di un **fascio di parabole tangenti alla retta $y=2x-4$ nel punto $P\ (2;0)$**, che è il punto base del fascio.

A. Per determinare le parabole che intersecano l'asse y in un punto che ha distanza 3 dall'origine, impongo il passaggio del fascio per i punti $(0;3)$ e $(0;\ -3)$:

$$(0;3): 6+3k+4=0 \qquad \boldsymbol{k=-\frac{10}{3}} \qquad\qquad (0;\ -3):-6-3k+4=0 \qquad \boldsymbol{k=-\frac{2}{3}}$$

B. Determino le generiche coordinate del vertice, determinando innanzi tutto il Δ del fascio, dopo aver scritto il fascio in forma esplicita:

$$y=x^2\frac{k+1}{k+2}-\frac{2k}{k+2}x-\frac{4}{k+2}$$

$$\Delta=\frac{4k^2}{(k+2)^2}+16\frac{k+1}{(k+2)^2}=4\frac{k^2+4k+4}{(k+2)^2}=4$$

Perciò le generiche coordinate del vertice sono: $V\left(\frac{k}{k+1};\ -\frac{k+2}{k+1}\right)$. sostituisco le coordinate del vertice nell'equazione della retta data:

$$\frac{3k}{k+1}+\frac{k+2}{k+1}-2=0 \qquad 3k+k+2-2k-2=0 \qquad \boldsymbol{k=0}$$

C. La generica direttrice ha equazione: $y=-\frac{1+\Delta}{4a}$ e, ricordando che $\Delta=4$:

$$-\frac{5}{4}\cdot\frac{k+2}{k+1}=-\frac{3}{4} \qquad 5k+10=3k+3 \qquad 2k=-7 \qquad \boldsymbol{k=-\frac{7}{2}}$$

6. La parabola e la retta rispettivamente di equazione $2y=x^2-6x-6$ e $3x-4y=0$ si intersecano in due punti A e B. Determina l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, che passa per A, B e $C\ (1;2)$.

Passando per i punti di intersezione tra la parabola e la retta, la parabola richiesta appartiene sicuramente al fascio di parabole che ottengo come combinazione lineare delle equazioni dei due oggetti dati:

$$2y-x^2+6x+6+k\ (3x-4y)=0$$

Impongo il passaggio del fascio per il punto C, sostituendo le sue coordinate nell'equazione. Una volta determinato il parametro, sostituendolo nel fascio otterrò l'equazione della parabola richiesta:

$$4-1+6+6+k\ (3-8)=0 \qquad k=\frac{15}{5}=3 \qquad \boldsymbol{y=-\frac{1}{10}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{3}{5}}$$