1. Sapendo che in una classe si possono scegliere in 300 modi diversi i due rappresentanti, quanti sono gli alunni della classe?

Per determinare in quanti modi si può effettuare la scelta, dobbiamo usare il coefficiente binomiale, perché è come determinare quante coppie si possono costruire a partire da x alunni:

$$\binom{x}{2}=\frac{x!}{2!\cdot(x-2)!}=300 \qquad \frac{x\,(x-1)(x-2)!}{2\,(x-2)!}=300 \qquad x^2-x-600=0 \qquad x_{1,2}=\frac{1\pm 49}{2}$$

Tra le due soluzioni, una è negativa, perciò l'unica risposta possibile è: $\mathbf{25}$

2. Su un piano sono date 10 rette, in modo che tra esse non vi siano coppie di rette parallele. Quanti sono i punti di intersezione di tali rette?

È come cercare di determinare quante coppie si possono formare a partire da 10 rette: $\binom{10}{2}=\frac{10!}{2!\cdot 8!}=\mathbf{45}$

3. Quattro giocatori si affrontano in una partita a carte. Sapendo che il numero complessivo di punti in palio è 11, calcola il numero dei possibili esiti della partita.

In questo caso non interessa l'ordine di uscita, ma solo la composizione di ogni possibile gruppo. L'uscita è data da $n=4$, ovvero i quattro giocatori, mentre gli 11 punti in palio sono indicati da $k=11$. Applicando la formula otteniamo: $\binom{n+k-1}{k}=\binom{14}{11}=\frac{14!}{11!\cdot 3!}=\mathbf{364}$.

4. Le disposizioni di un certo numero di oggetti a 5 a 5 sono tante quante sono le disposizioni degli stessi oggetti a 4 a 4. Determina il numero degli oggetti.

Le combinazioni si ottengono dai coefficienti binomiali. Indicando con x il numero degli elementi distinti, otteniamo:

$$\binom{x}{5}=\binom{x}{4} \qquad \frac{x!}{5!\,(x-5)!}=\frac{x!}{4!\,(x-4)!} \qquad \frac{1}{5\cdot 4!\,(x-5)!}=\frac{1}{4!\,(x-4)(x-5)!}$$

$$\frac{1}{5}=\frac{1}{x-4} \qquad x-4=5 \qquad x=\mathbf{9}$$

5. In un autobus vi sono 12 posti numerati. In quanti modi diversi 5 persone possono occuparli?

È come calcolare quanti anagrammi è possibile fare per una parola di 12 lettere, con una lettera che si ripete per 5 volte e l'altra per 7, dove le prime 5 lettere uguali sono le persone e le altre 7 uguali sono i posti liberi. Usiamo quindi una permutazione con ripetizione, ma non dimentichiamo i 5! Modi in cui possono disporsi le persone: $5!\cdot P_{12}^{5,7}=5!\cdot\frac{12!}{5!7!}=\mathbf{95040}$.

6. Un'insegna, costituita da una parola di 6 lettere, deve essere dipinta, colorando ciascuna lettera di un colore scelto tra rosso, verde, giallo, blu. In quanti modi ciò si può fare?

Per ogni lettera ho 4 scelte, date dai diversi colori. La risposta, perciò, è: $4^6=\mathbf{4096}$.

7. Si mescolano 12 carte e se ne distribuiscono 3 al giocatore A, 3 a B, 3 a C e 3 a D. In quanti modi diversi può avvenire la distribuzione?

Per il giocatore A abbiamo 12 scelte possibili per la prima carta, 11 per la seconda e 10 per la terza, ovvero $12\cdot 11\cdot 10$, ma visto che non conta l'ordine, dobbiamo dividere per il numero di disposizioni possibili, ovvero 3! e procediamo allo stesso modo per gli altri giocatori. Abbiamo quindi 220 scelte per il giocatore A, 84 scelte per il giocatore B, 20 scelte per il giocatore C e una sola scelta per il giocatore D, in totale: $220\cdot 84\cdot 20=\mathbf{369\,600}$.

8. Si scelga a caso un punto P all'interno di un cerchio. Si determini la probabilità che esso sia più vicino al centro che alla circonferenza del cerchio. (Esame di Stato Liceo Scientifico PNI, 2007 – Sessione suppletiva)

I punti più vicini al centro che alla circonferenza sono quelli che hanno distanza minore o uguale alla metà del raggio. La probabilità si ottiene quindi facendo il rapporto tra l'area della circonferenza di raggio $\frac{r}{2}$ e l'area della circonferenza di raggio r: $\frac{\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2}=\mathbf{\frac{1}{4}}$.

9. Un'urna contiene 150 palline, che possono essere di vetro o di plastica. Per la precisione: 62 palline sono bianche, 38 sono di vetro nero e 40 sono di plastica bianca. Calcolare la probabilità che, estratta a caso una pallina, NON sia di plastica nera. (Esame di Stato Liceo Scientifico PNI, 2006 – Sessione suppletiva)

Ricostruiamo tramite una tabella la distribuzione delle palline:

	Plastica	Vetro	
Bianche	40		62
Nere		38	
			150

	Plastica	Vetro	
Bianche	40	22	62
Nere	50	38	88
	90	60	150

Abbiamo quindi 50 palline nere di plastica, quindi tutte le altre sono 100 su un totale di 150 palline, ovvero: $\frac{100}{150} = \mathbf{\frac{2}{3}}$.

10. Un'urna contiene 8 palline viola, 3 gialle e 9 nere. Si estraggono contemporaneamente due palline. Calcola la probabilità di avere:
A. due palline viola;
B. una pallina gialla e una nera;
C. due palline non gialle

A. Perché siano entrambe viola, calcolando che non c'è reimmissione: $\frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} = \mathbf{\frac{14}{95}}$.

B. Possiamo ottenere una pallina gialla e una nera in due modi, ovvero la prima gialla e la seconda nera o la prima nera e la seconda gialla. In questo caso, quindi, calcolando la probabilità dobbiamo moltiplicare per 2: $2 \cdot \frac{3}{20} \cdot \frac{9}{19} = \mathbf{\frac{27}{190}}$.

C. Perché le due palline siano non gialle, è sufficiente che siano viola o nere senza distinzione: $\frac{17}{20} \cdot \frac{16}{19} = \mathbf{\frac{68}{95}}$.

11. In un'urna vi sono 5 palline rosse e 10 gialle; in una seconda urna vi sono 8 palline rosse. Si estrae una pallina dalla prima urna e la si inserisce nella seconda. Si estrae poi una pallina dalla seconda urna. Qual è la probabilità che questa pallina sia rossa?

Nel caso in cui la prima pallina che passa dalla prima alla seconda urna sia rossa, l'estrazione della prima pallina ha una probabilità di 5/15 e la seconda urna conterrà 9 palline rosse: avremo quindi una probabilità di 1 di estrarre una pallina rossa dalla seconda urna.
Nel caso in cui la prima pallina che passa dalla prima alla seconda urna sia gialla, l'estrazione della prima pallina ha una probabilità di 10/15 e la seconda urna conterrà 8 palline rosse e 1 gialla: avremo quindi una probabilità di 8/9 di estrarre una pallina rossa dalla seconda urna.
In totale: $\frac{5}{15} \cdot 1 + \frac{10}{15} \cdot \frac{8}{9} = \mathbf{\frac{25}{27}}$

12. Tre urne sono così composte:

urna A: 10 palline blu, 15 bianche e 5 verde
urna B: 20 palline blu e 10 bianche
urna C: 15 palline blu e 15 verdi

A. Calcola la probabilità che, estraendo una pallina da ciascuna urna, due siano blu e una non blu.
B. Calcola la probabilità che, estraendo una pallina da ciascuna urna, siano tutte e tre blu e la probabilità che siano tutte non blu.
C. Calcola la probabilità dell'ultimo caso possibile, specificando di quale caso si tratta.

Prima di procedere, precisiamo le probabilità di estrarre una pallina blu dalle singole urne: $p(A) = \frac{1}{3}$, $p(B) = \frac{2}{3}$, $p(C) = \frac{1}{2}$.

A. Il caso di due palline blu e una non blu possiamo ottenerlo in tre diversi modi, perché la pallina non blu può essere estratta dall'urna A, B o C, ovvero: $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2+1+4}{18} = \mathbf{\frac{7}{18}}$.

B. La probabilità che siano tutte blu: $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{9}}$. Allo stesso modo la probabilità che tutte le palline siano non blu, la otteniamo con la probabilità contraria: $\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \mathbf{\frac{1}{9}}$.

C. L'ultimo caso possibile è che una sola pallina sia blu:

$$\frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 + 4 + 2}{18} = \mathbf{\frac{7}{18}}$$

Questa probabilità ci offre la conferma che si tratta dell'ultimo caso possibile, infatti sommando tutte le probabilità otteniamo 1, la probabilità certa, che esaurisce tutti i casi.