1. $$\left(\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x-4}\right):\frac{1-x^2}{x^2-6x+8}$$ $C.E.: x \neq \pm 1 \ \wedge x \neq 2 \ \wedge x \neq 4$

$$=\frac{x-4-3(x-2)}{(x-2)(x-4)}:\frac{1-x^2}{x^2-6x+8}=\frac{x-4-3x+6}{(x-2)(x-4)}:\frac{1-x^2}{x^2-6x+8}=$$

$$=\frac{-2x+2}{(x-2)(x-4)}\cdot\frac{x^2-6x+8}{1-x^2}=\frac{2(1-x)}{(x-2)(x-4)}\cdot\frac{(x-2)(x-4)}{(1-x)(1+x)}=\mathbf{\frac{2}{1+x}}$$

2. $$\frac{x^3-6\,x^2+12x-8}{x^2-4x+4}\cdot\frac{2\,x^3+4\,x^2+8x}{x^3-8}$$ $C.E.: x \neq 2$

$$=\frac{(x-2)^3}{(x-2)^2}\cdot\frac{2\,x\,(x^2+2\,x+4)}{(x-2)(x^2+2\,x+4)}=\mathbf{2x}$$

3. $$\frac{2}{x^2-2x-3}+\frac{3}{x^2-4x+3}-\frac{5x+1}{x^3-3x^2-x+3}$$ $C.E.: x \neq \pm 1 \ \wedge x \neq 3$

$$=\frac{2}{(x-3)(x+1)}+\frac{3}{(x-3)(x-1)}-\frac{5x+1}{x^2(x-3)-1(x-3)}=\frac{2}{(x-3)(x+1)}+\frac{3}{(x-3)(x-1)}-\frac{5x+1}{(x-3)(x^2-1)}=$$

$$=\frac{2}{(x-3)(x+1)}+\frac{3}{(x-3)(x-1)}-\frac{5x+1}{(x-3)(x-1)(x+1)}=\frac{2\,(x-1)+3(x+1)-(5x+1)}{(x-3)(x+1)(x-1)}=$$

$$=\frac{2x-2+3x+3-5x-1}{(x-3)(x+1)(x-1)}=\mathbf{0}$$

4. $$\left[\left(\frac{x^2-8x+16}{x-4}+2\right)^{-1}-\frac{1}{x^2-4}\right]^2\cdot\frac{x^2+4x+4}{x^2+2x+1}$$ $C.E.: x \neq -1 \ \wedge x \neq 4 \ \wedge x \neq \pm 2$

$$=\left[\left(\frac{(x-4)^2}{x-4}+2\right)^{-1}-\frac{1}{x^2-4}\right]^2\cdot\frac{(x+2)^2}{(x+1)^2}=\left[(x-4+2)^{-1}-\frac{1}{x^2-4}\right]^2\cdot\frac{(x+2)^2}{(x+1)^2}=$$

$$=\left[(x-2)^{-1}-\frac{1}{x^2-4}\right]^2\cdot\frac{(x+2)^2}{(x+1)^2}=\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)(x+2)}\right]^2\cdot\frac{(x+2)^2}{(x+1)^2}=\left[\frac{x+2-1}{(x-2)(x+2)}\right]^2\cdot\frac{(x+2)^2}{(x+1)^2}=$$

$$=\left[\frac{x+1}{(x-2)(x+2)}\right]^2\cdot\frac{(x+2)^2}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2}{(x+2)^2(x-2)^2}\cdot\frac{(x+2)^2}{(x+1)^2}=\mathbf{\frac{1}{(x-2)^2}}$$

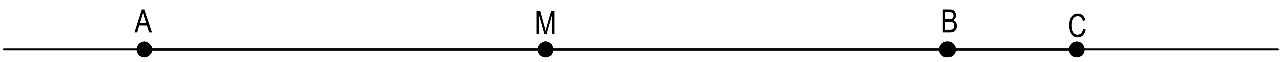
5. $$\left(\frac{x+1}{x-2}-\frac{x}{4-2x}\right)^2\cdot\frac{4x+12}{9x^2+12x+4}+\frac{x^2-5x+1}{x^2-4x+4} \qquad C.E.: x\neq 2 \wedge x\neq -\frac{2}{3}$$

$$=\left(\frac{x+1}{x-2}+\frac{x}{2(x-2)}\right)^2\cdot\frac{4(x+3)}{(3x+2)^2}+\frac{x^2-5x+1}{(x-2)^2}=\left(\frac{2x+2+x}{2(x-2)}\right)^2\cdot\frac{4(x+3)}{(3x+2)^2}+\frac{x^2-5x+1}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{(3x+2)^2}{4\,(x-2)^2}\cdot\frac{4(x+3)}{(3x+2)^2}+\frac{x^2-5x+1}{(x-2)^2}=\frac{x+3}{(x-2)^2}+\frac{x^2-5x+1}{(x-2)^2}=\frac{x+3+x^2-5x+1}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{x^2-4x+4}{(x-2)^2}=\frac{(x-2)^2}{(x-2)^2}=\mathbf{1}$$

6. Dimostra che la distanza del punto medio di un segmento da un qualunque punto esterno al segmento, ma appartenente alla retta su cui giace il segmento, è congruente alla semisomma delle distanze di questo punto dagli estremi del segmento.



Consideriamo la situazione in cui C, il punto esterno al segmento, segue B rispetto ad A. Analoga dimostrazione dovremmo effettuare per il caso in cui C preceda A, rispetto a B.

Ipotesi: $M\in\overline{AB}$
$\overline{AM}\cong\overline{MB}$
$A, M, B, C\ allineati$

Tesi: $\overline{MC}\cong\frac{\overline{AC}+\overline{BC}}{2}$

$$\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{AM}+\overline{MB}+\overline{BC}+\overline{BC}\cong\overline{MB}+\overline{MB}+\overline{BC}+\overline{BC}=$$

La congruenza $\overline{AM}\cong\overline{MB}$ vale per ipotesi

$$=2(\overline{MB}+\overline{BC})=2\,\overline{MC}$$

Dividendo entrambi i membri per 2, ottengo la tesi.

C.V.D.