

1. Dato il triangolo ABC, di vertici A (-4; 3), B (0; -3) e C (7; 6), determinane le coordinate del baricentro, il perimetro e l'area.

Determino le coordinate del baricentro G del triangolo:  $G \left( \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right) = \left( \frac{-4+7}{3}; \frac{3-3+6}{3} \right) = (1; 2)$

Determino le misure delle lunghezze dei singoli lati:  $\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{16 + 36} = 2\sqrt{13}$

$$\overline{BC} = \sqrt{49 + 81} = \sqrt{130}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{121 + 9} = \sqrt{130}$$

Il perimetro è dato dalla somma dei lati:  $2p = 2\sqrt{13} + \sqrt{130} + \sqrt{130} = 2(\sqrt{13} + \sqrt{130})$

Trattandosi di un triangolo isoscele, l'altezza relativa alla base coincide con la mediana, perciò per determinare la lunghezza della base, calcolo il punto medio M della base  $\overline{AB}$  e poi calcolo l'altezza  $\overline{MC}$ .

$$M \left( \frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right) = (-2; 0) \Rightarrow \overline{MC} = \sqrt{9^2 + 6^2} = 3\sqrt{13}$$

A questo punto, posso calcolare l'area del triangolo:  $A_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{MC}}{2} = \frac{2\sqrt{13} \cdot 3\sqrt{13}}{2} = 39$

2. Dati due punti A (-2; -1) e B (3; 2), determina il punto Q, interno al segmento  $\overline{AB}$ , tale che  $3 \overline{AQ} \cong 5 \overline{QB}$ . Considerata poi la retta r, perpendicolare al segmento  $\overline{AB}$  e passante per Q, individua su di essa il punto C con ordinata doppia dell'ascissa. Determina infine l'area del triangolo ABC.

Considero le proiezioni A', B', Q' rispettivamente dei punti A, B e Q sull'asse x. Per il teorema di Talete, considerando le proiezioni  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$  e  $\overline{CC'}$ , ovvero il fascio di rette parallele intersecato dalle due trasversali (il segmento  $\overline{AB}$  e l'asse x), i segmenti che si formano sulla prima trasversale sono direttamente proporzionali ai segmenti che si formano sulla seconda trasversale, perciò:  $3 \overline{AQ'} \cong 5 \overline{Q'B'}$ . In termini di equazioni:  $3(x + 2) = 5(3 - x)$ , dove x è l'ascissa di Q. Essendo Q interno al segmento  $\overline{AB}$ ,  $-2 < x < 3$ , perciò non servono i valori assoluti. Dall'equazione, possiamo facilmente ricavare l'ascissa di Q:  $x = \frac{9}{8}$ .

Applichiamo un procedimento analogo per determinare l'ordinata di Q e trovando l'equazione:  $3(y + 1) = 5(2 - y)$ , con  $-1 < y < 2$ , perciò:  $y = \frac{7}{8}$ .

$$Q \left( \frac{9}{8}; \frac{7}{8} \right)$$

Per determinare l'equazione della retta r, determino il coefficiente angolare del segmento  $\overline{AB}$ :

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3}{5}$$

Determino la retta r:  $y - y_Q = -\frac{1}{m_{\overline{AB}}} (x - x_Q) \Rightarrow y - \frac{7}{8} = -\frac{5}{3} \left( x - \frac{9}{8} \right)$

Sulla retta r devo determinare il punto C con ordinata doppia dell'ascissa, ovvero di coordinate C (x; 2x). Sapendo che se il punto appartiene alla retta, allora soddisfa la sua equazione, sostituisco le coordinate generiche di C nell'equazione della retta r:

$$2x - \frac{7}{8} = -\frac{5}{3} \left( x - \frac{9}{8} \right) \Rightarrow \frac{11}{3} x = \frac{22}{8} \Rightarrow x = \frac{3}{4} \Rightarrow C \left( \frac{3}{4}; \frac{3}{2} \right)$$

A questo punto possiamo calcolare l'area del triangolo ABC:  $A_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{QC}}{2}$

$$\overline{AB} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} \quad \overline{QC} = \sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{5}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{34}}{8}$$

$$A_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{QC}}{2} = \frac{\sqrt{34} \cdot \frac{\sqrt{34}}{8}}{2} = \frac{17}{8}$$

3. Sia dato il trapezio isoscele ABCD, di base minore  $\overline{AB}$ , con A ( - 3; 1) e B (5; 7) e la base maggiore  $\overline{CD}$  adagiata sulla retta r di equazione  $3x - 4y - 12 = 0$ . Sapendo che  $\overline{CD} \cong \frac{5}{2} \overline{AB}$ , determina l'area del trapezio.

Determino innanzi tutto la lunghezza della base  $\overline{AB}$ :  $\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$

Posso quindi determinare la lunghezza della base  $\overline{CD}$ :  $\overline{CD} \cong \frac{5}{2} \overline{AB} = \frac{5}{2} \cdot 10 = 25$ .

Per avere l'area del trapezio, serve l'altezza, che posso determinare come distanza del punto A dalla retta r, di equazione nota:

$$\overline{AH} = \frac{|a x_A + b y_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-9 - 4 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

Ora posso determinare l'area del trapezio:

$$A = \frac{(\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot \overline{AH}}{2} = \frac{35 \cdot 5}{2} = \frac{175}{2}$$