

23. Scrivi l'equazione dell'ellisse passante per i punti  $P(4, 2)$  e  $Q(2; \sqrt{13})$  e rappresentala.

Sostituisco le coordinate di P e Q nell'equazione generica dell'ellisse:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  e metto a sistema le due condizioni:

$$\begin{cases} \frac{16}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \\ \frac{4}{a^2} + \frac{13}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\left(-\frac{13}{b^2} + 1\right) + \frac{4}{b^2} = 1 \\ \frac{4}{a^2} = -\frac{13}{b^2} + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{52}{b^2} + 4 + \frac{4}{b^2} = 1 \\ \frac{4}{a^2} = -\frac{13}{b^2} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{48}{b^2} = -3 \\ \frac{4}{a^2} = -\frac{13}{b^2} + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 16 \\ \frac{4}{a^2} = -\frac{13}{16} + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{64}{3} \\ b^2 = 16 \end{cases}$$

Quindi l'equazione dell'ellisse è:

$$\frac{3x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$$

24. Scrivi l'equazione della retta tangente all'ellisse di equazione  $5x^2 + 3y^2 = 47$  nel suo punto  $P(2, 3)$

Dato che dal testo si arguisce che il punto appartiene all'ellisse, si può applicare la regola dello sdoppiamento per determinare l'equazione della tangente:

$$5x \cdot 2 + 3y \cdot 3 = 47 \quad \Rightarrow \quad 10x + 9y - 47 = 0$$

25. Scrivi l'equazione della retta tangente all'ellisse di equazione  $x^2 + 2y^2 = 18$  nel suo punto  $A(2; \sqrt{7})$ .

Dato che dal testo si arguisce che il punto appartiene all'ellisse, si può applicare la regola dello sdoppiamento per determinare l'equazione della tangente:

$$x \cdot 2 + 2y \cdot \sqrt{7} = 18 \quad \Rightarrow \quad x + \sqrt{7}y - 9 = 0$$

26. Trova le intersezioni della retta  $2x - y + 4 = 0$  con l'ellisse avente  $a = 1$  ed i fuochi  $F\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$ .

Bisogna innanzi tutto determinare l'equazione dell'ellisse:

$$a = 1 \quad e \quad c = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ovvero l'ellisse ha equazione:  $x^2 + 2y^2 = 1$ . Metto a sistema le due equazioni:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = 2x + 4 \\ x^2 + 2(2x + 4)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + 4 \\ x^2 + 8x^2 + 32x + 32 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2x + 4 \\ 9x^2 + 32x + 31 = 0 \end{cases} &\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 279}}{9} \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow \text{retta esterna} \end{aligned}$$

27. Trova le coordinate degli eventuali punti di intersezione della retta di equazione  $2x + 3y - 6 = 0$  con l'ellisse di equazione  $4x^2 + 27y^2 = 27$ .

Metto a sistema le due equazioni:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4x^2 + 27y^2 = 27 \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2x = 6 - 3y \\ (6 - 3y)^2 + 27y^2 = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 6 - 3y \\ 9(2 - y)^2 + 27y^2 = 27 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x = 6 - 3y \\ (2 - y)^2 + 3y^2 = 3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2x = 6 - 3y \\ 4 - 4y + y^2 + 3y^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 6 - 3y \\ 4y^2 - 4y + 1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x = 6 - 3y \\ (2y - 1)^2 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2x = 6 - \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{9}{4}; \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

28. Determina l'equazione della tangente condotta all'ellisse  $3x^2 + y^2 = 3$  nel punto  $P(2, 0)$ .

Verifico innanzi tutto se il punto appartiene all'ellisse, sostituendo le sue coordinate nell'equazione dell'ellisse:

$$3 \cdot 2^2 + 0^2 \neq 3 \Rightarrow P \notin \text{ellisse.}$$

Perciò determino l'equazione del fascio di rette centrato in  $P$ , la metto a sistema con l'equazione dell'ellisse e pongo  $\Delta = 0$  nella risolvente:

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 3 \\ y = m(x - 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = m(x - 2) \\ 3x^2 + (mx - 2m)^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = m(x - 2) \\ 3x^2 + m^2x^2 - 4m^2x + 4m^2 = 3 \end{cases}$$

Procedo con la seconda equazione, la risolvente:  $(3 + m^2) x^2 - 4m^2 x + 4m^2 - 3 = 0$

$$\frac{\Delta}{4} = 4m^4 - (4m^2 - 3)(3 + m^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4m^4 - 12m^2 - 4m^4 + 9 + 3m^2 = 0$$

$$-9m^2 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad y \pm x \mp 2 = 0$$

29. Determina l'equazione della tangente condotta all'ellisse  $16x^2 + 25y^2 = 400$  nel punto P (5, 0).

Essendo P un punto dell'ellisse, ma in particolare il vertice appartenente al semiasse positivo delle x, la tangente all'ellisse sarà la retta perpendicolare all'asse x e passante per P, ovvero:  $x = 5$ .

30. Determina il valore di  $m$  dell'equazione  $x + y + m = 0$ , in modo che le rette corrispondenti risultino tangenti all'ellisse  $9x^2 + 16y^2 = 144$  e fanne la verifica grafica.

Metto a sistema le due equazioni e pongo  $\Delta = 0$  nella risolvente:

$$\begin{cases} x + y + m = 0 \\ 9x^2 + 16y^2 = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y - m \\ 9(-y - m)^2 + 16y^2 = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y - m \\ 9y^2 + 18ym + 9m^2 + 16y^2 = 144 \end{cases}$$

Procedo con la seconda equazione, ovvero la risolvente del sistema:

$$25y^2 + 18ym + 9m^2 - 144 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta}{4} = 81m^2 - 25(9m^2 - 144) = 0$$

$$9m^2 - 25(m^2 - 16) = 0 \quad \Rightarrow \quad 9m^2 - 25m^2 + 400 = 0 \quad \Rightarrow \quad -16m^2 + 400 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$m = \pm 5$$