1. $x^2+9-(3x-1)(3x+1)\geq(1-2x)(1+2x)-4x^2$

$$x^2+9-(9x^2-1)\geq(1-4x^2)-4x^2$$

$$x^2+9-9x^2+1\geq 1-4x^2-4x^2 \quad\Longrightarrow\quad 9\geq 0 \qquad \forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$$

2. $\frac{x+1}{15}-\frac{2\,(x-1)}{3}\leq-\frac{1}{2}x-\left(\frac{3}{5}-\frac{2-x}{10}\right)$

$$\frac{x+1}{15}-\frac{2\,(x-1)}{3}\leq-\frac{1}{2}x-\frac{3}{5}+\frac{2-x}{10}$$

$$\frac{2x+2-20\,(x-1)}{30}\leq\frac{-15x-18+6-3x}{30}$$

$$22\leq-12 \qquad \nexists \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$$

3. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2\geq(x+2)(x-2)-(x-1)(x+3)$

$$x^2+\frac{9}{4}-3x-\left(x^2+\frac{9}{4}+3x\right)\geq x^2-4-(x^2+3x-x-3)$$

$$x^2+\frac{9}{4}-3x-x^2-\frac{9}{4}-3x\ \geq x^2-4-x^2-3x+x+3$$

$$-4x\geq-1 \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{x\leq\frac{1}{4}}$$

4. $\frac{x-\frac{1}{3}}{2}+\frac{\frac{1}{2}-x}{3}<\frac{x}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$

$$\frac{x}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{x}{3}<\frac{x}{\frac{1}{6}}$$

$$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}<6x$$

$$3x-2x-36x<0 \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{x>0}$$

5. $\frac{(x+3)(x-3)-x^2}{5x-5}\leq 0$

$$\frac{x^2-9-x^2}{5\,(x-1)}\leq 0$$

$$\frac{-9}{5\,(x-1)}\leq 0$$

$$\frac{1}{x-1}\geq 0 \quad\Longrightarrow\quad x-1>0 \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{x>1}$$

6. $x^3+5x^2-6x<0$

$$x\,(x^2+5x-6)<0$$

$$x\,(x+6)(x-1)<0$$

$1°F>0:\quad x>0$ $\qquad$ $2°F>0:\quad x>-6$ $\qquad$ $3°F>0:\quad x>1$

$x<-6$	$-6<x<0$	$0<x<1$	$x>1$
–	–	+	+
–	+	+	+
–	–	–	+
–	**+**	**–**	**+**

$$\boldsymbol{x<-6 \quad \vee \quad 0<x<1}$$

7. $\frac{(x^2-10x+25)(x+5)(x^2+4)}{(x^2+2x+4)(x^2+9)}\le 0$

Eliminando tutti i fattori positivi per qualsiasi valore di x, perché $x^2-10x+25$ è un quadrato, x^2+4 e x^2+9 somme di quadrati e x^2+2x+4 perché falso quadrato, ottengo:

$$x+5\le 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x\le -5}$$

8. $\begin{cases} \frac{x^2+5x+25}{x^2+16}\le 0 \\ \frac{(5x+4)(x-3)(2x+1)}{(x+6)(x+3)}>0 \end{cases}$

Comincio con il risolvere la prima disequazione: il numeratore è un falso quadrato, il denominatore è una somma di quadrati, perciò la frazione è sicuramente positiva e non può essere nulla. Perciò la prima disequazione è impossibile.
Di conseguenza, l'intero sistema è impossibile.

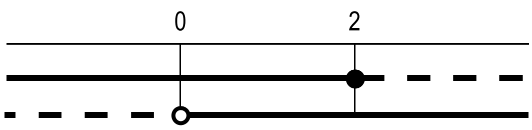
$$\nexists \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$$

9. $\begin{cases} -x^2\le (1-x)(x+2) \\ \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)x+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)>\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$

Considero la disequazioni separatamente:

$$-x^2\le x+2-x^2-2x \quad \Longrightarrow \quad x\le 2$$

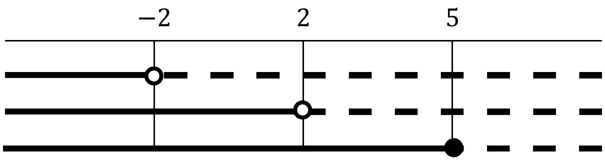
$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}>\frac{1}{3}x-\frac{1}{6} \quad \Longrightarrow \quad x+3x-2x>0 \quad \Longrightarrow \quad x>0$$



$$\boldsymbol{0<x\le 2}$$

10. $\begin{cases} x-2>2x \\ 2\,(6-x)>4x \\ x+1\geq -2\,(2-x) \end{cases}$

$$\begin{cases} x<-2 \\ x<2 \\ x\leq 5 \end{cases}$$



$$\boldsymbol{x<-2}$$

11. $ax>b-2$

Se $a>0$: $\quad \boldsymbol{x>\frac{b-2}{a}}$

Se a <0: $\quad \boldsymbol{x<\frac{b-2}{a}}$

Se $a=0$: $\quad 0x>b-2$ Se $b<2$: $\quad \forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$

Se $b\geq 2$: $\quad \nexists \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$

12. $(a+1)\,x\geq a^2-1$

$$(a+1)\,x\geq (a-1)(a+1)$$

Se $a>-1$: $\quad \boldsymbol{x\geq a-1}$

Se $a<-1$: $\quad \boldsymbol{x\leq a-1}$

Se $a=-1$: $\quad \forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$