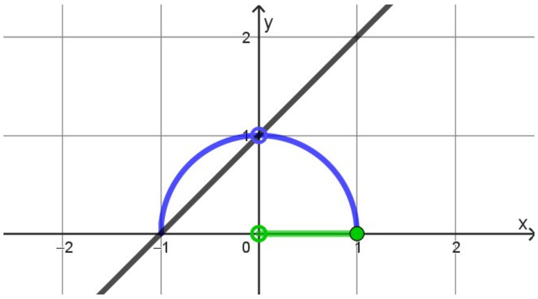
1. Risolvi graficamente le seguenti disequazioni irrazionali:

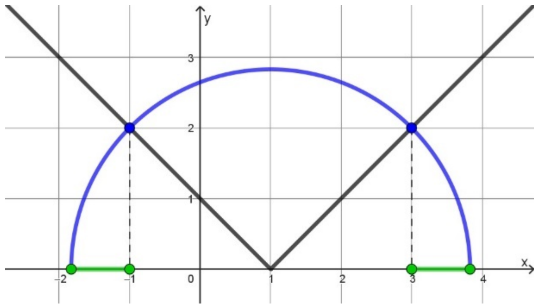
$$\sqrt{1-x^2} < x+1 \qquad \sqrt{2x-x^2+7} \le |x-1|$$



$$y=\sqrt{1-x^2} \qquad \begin{cases} y \ge 0 \\ -1 \le x \le 1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \qquad C \equiv O \qquad r=1$$

$$y=x+1$$

Dopo aver rappresentato la semicirconferenza, la retta e le intersezioni, le soluzioni sono date dall'intervallo: $\mathbf{0 < x \le 1}$.



$$y=\sqrt{2x-x^2+7}$$

$$x^2-2x+1 \le 8 \qquad (x-1)^2 \le 8 \qquad -2\sqrt{2} \le x-1 \le 2\sqrt{2}$$

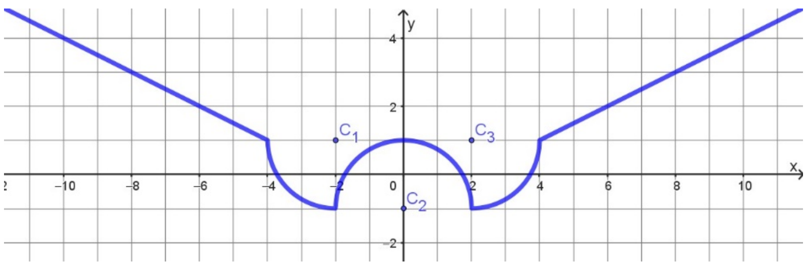
$$\begin{cases} y \ge 0 \\ 1-2\sqrt{2} \le x \le 1+2\sqrt{2} \\ x^2+y^2-2x-7=0 \end{cases} \qquad C(1;0) \qquad r=2\sqrt{2}$$

$$y=|x-1|$$

Dopo aver rappresentato la semicirconferenza, le due semirette e le intersezioni, le soluzioni sono date dagli intervalli:

$$\mathbf{1-2\sqrt{2} \le x \le -1 \quad \vee \quad 3 \le x \le 1+2\sqrt{2}}$$

2. Scrivi l'espressione analitica della seguente funzione, di cui è assegnato il grafico (gli archi rappresentati sono archi di circonferenza di cui sono indicati i centri).




Le due semirette sono simmetriche rispetto all'asse y. Considero la semiretta nel semipiano positivo della x, ne determino il coefficiente angolare e poi impongo il passaggio per il punto $(4;1)$:

$$m=\frac{2-1}{6-4}=\frac{1}{2}$$

$$y-1=\frac{1}{2}(x-4) \qquad y=\frac{1}{2}x-1$$

Per simmetria, posso determinare l'equazione della semiretta nel semipiano negativo delle x: $y=-\frac{1}{2}x-1$

Quindi l'equazione delle semirette è: $\mathbf{y=\frac{1}{2}|x|-1}$

Si può procedere allo stesso modo per quanto riguarda i due quarti di circonferenza, simmetrici rispetto all'asse y, con centri $C_1$ e $C_3$:

$$\mathcal{C}_1:\ (x+2)^2+(y-1)^2=2^2 \qquad y-1=-\sqrt{4-(x+2)^2} \qquad y=1-\sqrt{-x^2-4x}$$

$$\mathcal{C}_3:\ (x-2)^2+(y-1)^2=2^2 \qquad y-1=-\sqrt{4-(x-2)^2} \qquad y=1-\sqrt{-x^2+4x}$$

Quindi: $\mathbf{y=1-\sqrt{-x^2+4|x|}}$.

Determino l'ultima semicirconferenza: $\mathcal{C}_2:\ x^2+(y+1)^2=2^2 \qquad y+1=\sqrt{4-x^2} \qquad y=-1+\sqrt{4-x^2}$

$$\mathbf{y=\begin{cases} \frac{1}{2}|x|-1 & |x| \ge 4 \\ 1-\sqrt{4|x|-x^2} & -4<x\le -2 \ \vee\ 2 \le x < 4 \\ -1+\sqrt{4-x^2} & |x|<2 \end{cases}}$$

3. Determina i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per i quali l'equazione $x^2 + y^2 + 2kx - 4y - k + 6 = 0$ rappresenta una circonferenza non degenere.

Devo determinare il raggio della circonferenza: $r = \sqrt{k^2 + 4 + k - 6} = \sqrt{k^2 + k - 2}$

L'argomento della radice deve essere positivo: $k^2 + k - 2 > 0$ $\quad k_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \left\langle\begin{matrix}-2\\ 1\end{matrix}\right.$ $\quad \boldsymbol{k < -2 \ \vee \ k > 1}$

4. Scrivi l'equazione della circonferenza avente per diametro il segmento che ha per estremi i punti di intersezione della retta di equazione $3x - 2y = 6$ con gli assi cartesiani.

Devo determinare le intersezioni della retta con gli assi cartesiani, scegliendo prima $x = 0$ e poi $y = 0$ $\quad A(2; 0) \quad B(0; -3)$

Determino il centro della circonferenza, punto medio tra i due punti dati: $C \equiv M_{AB}\left(1; -\dfrac{3}{2}\right)$

E sapendo che il raggio è $r = \frac{\overline{AB}}{2}$: $\quad (x-1)^2 + \left(y + \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{2^2 + 3^2}{4}$ $\quad \boldsymbol{x^2 + y^2 - 2x + 3y = 0}$

5. Scrivi l'equazione della circonferenza passante per i punti $A\,(-3;\ -2)$ e $B(1;\ -1)$, sapendo che l'ascissa del centro è $-1$.

Determino l'asse della corda AB: $\quad (x+3)^2 + (y+2)^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2 \quad 8x + 2y + 11 = 0$

Determino le coordinate del centro, conoscendone l'ascissa: $C\left(-1; -\dfrac{3}{2}\right)$

Quindi posso determinare l'equazione della circonferenza: $\quad (x+1)^2 + \left(y + \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{4^2 + 1}{4}$ $\quad \boldsymbol{x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1 = 0}$

6. Scrivi l'equazione della circonferenza di centro $C(-3; 4)$, passante per l'origine del piano cartesiano. Dopo aver verificato che il punto $E(-8; 4)$ appartiene alla circonferenza, determina l'estremo A del diametro AO. Verifica analiticamente che le rette EO e AE sono perpendicolari.

Sapendo che passa per l'origine, l'equazione generica della circonferenza è: $\quad x^2 + y^2 + ax + by = 0$

Le coordinate generiche del centro sono: $C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$ perciò: $\quad a = 6 \ \wedge \ b = -8$ $\quad \boldsymbol{x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0}$

Verifico il passaggio della circonferenza per E, sostituendo le coordinate di E nella circonferenza: $\quad 64 + 16 - 48 - 32 = 0$

Se A è l'estremo del diametro OA, C è il punto medio del segmento OA, perciò: $\quad \begin{cases} \dfrac{x_A + x_o}{2} = x_C \\ \dfrac{y_A + y_o}{2} = y_C \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_A = 2x_C - x_o = -6 \\ y_A = 2y_C - y_o = 8 \end{cases}$

Perciò il punto A ha coordinate $A\,(-6; 8)$.

Determino i coefficienti angolari delle rette date e verifico che il loro prodotto sia – 1 $\quad m_{EO} = -\dfrac{4}{8} = -\dfrac{1}{2} \quad m_{AE} = \dfrac{4}{2} = 2$

$$m_{EO} \cdot m_{AE} = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1 \qquad c.v.d.$$

7. Determina le coordinate dei due punti appartenenti alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-12x+4y+20=0$ tali che le tangenti condotte da essi alla circonferenza si intersechino nell'origine.

Considero l'origine come punto esterno dal quale vengono condotte due tangenti. Il fascio di rette con centro nell'origine ha generica equazione $y=kx$. Il centro della circonferenza è $C(6;\ -2)$ e il raggio è: $r=\sqrt{36+4-20}=2\sqrt{5}$. Pongo la distanza del centro dalla generica retta del fascio uguale al raggio:

$$\frac{|6k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2\sqrt{5} \qquad |3k+1|=\sqrt{5k^2+5} \qquad 9k^2+6k+1=5k^2+5 \qquad 4k^2+6k-4=0$$

$$2k^2+3k-2=0 \qquad k_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\begin{cases}\frac{1}{2}\\ -2\end{cases}$$

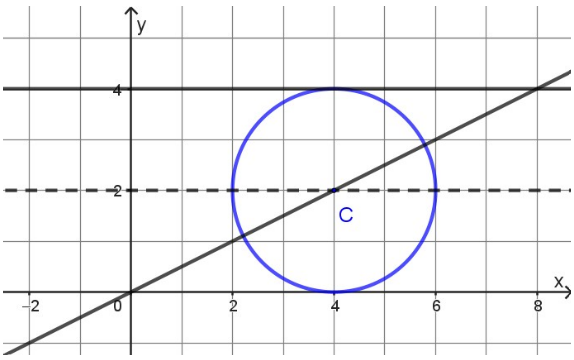
Determino le intersezioni tra le tangenti e la circonferenza:

$$\begin{cases}x^2+y^2-12x+4y+20=0\\ y=\frac{1}{2}x\end{cases} \qquad x^2+\frac{1}{4}x^2-12x+2x+20=0 \qquad \frac{1}{4}x^2-2x+4=0 \qquad \left(\frac{1}{2}x-2\right)^2=0$$

$$\begin{cases}x^2+y^2-12x+4y+20=0\\ y=-2x\end{cases} \qquad x^2+4x^2-12x-8x+20=0 \qquad x^2-4x+4=0 \qquad (x-2)^2=0$$

I punti di intersezione sono: $\boldsymbol{A\ (4;2)}$ e $\boldsymbol{B(2;\ -4)}$.

8. Determina l'equazione della circonferenza tangente alle due rette di equazioni $y=0$ e $y=4$, avente il centro sulla retta di equazione $x-2y=0$.




Visto che la circonferenza è tangente a due rette parallele all'asse x, il centro della circonferenza si troverà su una retta parallela all'asse x equidistante dalle due rette, cioè sulla retta $y=2$. Mettendo a sistema questa retta con quella data, ottengo le coordinate del centro:

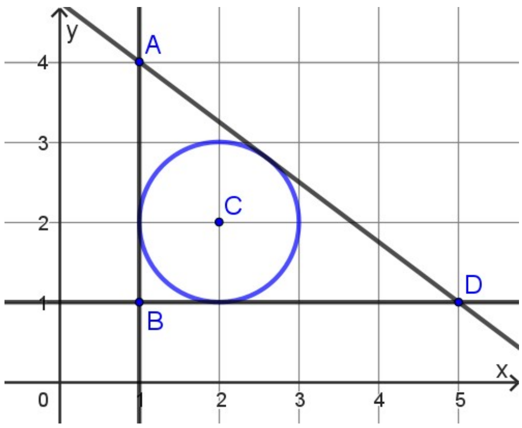
$$\begin{cases}y=2\\ x=2y\end{cases} \qquad C\ (4;2)$$

La distanza tra le due rette date è la lunghezza del diametro, perciò: $r=2$.

$$(x-4)^2+(y-2)^2=2^2$$

$$\boldsymbol{x^2+y^2-8x-4y+16=0}$$

9. Determina l'area del triangolo circoscritto alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-4x-4y+7=0$, avente un vertice in $A(1;4)$ e un lato parallelo all'asse x.




La circonferenza ha centro $C\ (2;2)$ e raggio $r=1$. Dal punto A posso tracciare due tangenti e una è $x=1$. Quella parallela all'asse x ha equazione $y=1$, avendo distanza uguale a 1 dal centro. Determino la seconda tangente dal punto A, ponendo la distanza del centro dalla generica retta di centro A, $y-4=m(x-1)$ uguale al raggio:

$$\frac{|2m-2+4-m|}{\sqrt{m^2+1}}=1 \qquad |m+2|=\sqrt{m^2+1}$$

$$m^2+4m+4=m^2+1 \qquad m=-\frac{3}{4}$$

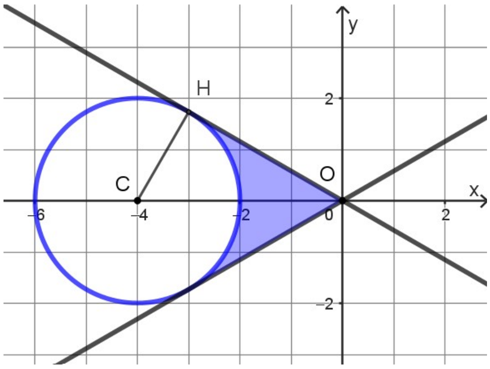
La retta tangente ha equazione: $3x+4y-19=0$.
Per determinare le coordinate di D, metto a sistema la retta con $y=1$.

Il punto D ha coordinate: $D\ (5;1)$. Posso determinare l'area del triangolo ABD, che è un triangolo rettangolo:

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot|5-1|\cdot|4-1|=\boldsymbol{6}$$

10. Scegli **uno** dei seguenti problemi:

A. Determina l'area del triangolo mistilineo colorato in figura, sapendo che le due rette rappresentate sono tangenti alla circonferenza.




Dal grafico, posso dedurre il centro della circonferenza $C(-4;0)$ e raggio 2. Considero il triangolo COH, dove CH è la distanza del centro dalla tangente. So che:

$$\overline{CH}=2 \qquad \overline{CO}=4$$

Un triangolo rettangolo con l'ipotenusa doppia del cateto minore, è metà di un triangolo equilatero, perciò $C\hat{O}H=30°$ e, quindi, $H\hat{C}O=60°$. Per determinare l'area del triangolo mistilineo, faccio la differenza tra l'area del triangolo COH e il settore circolare di ampiezza 60°, che è quindi 1/6 del cerchio. Visto che il triangolo mistilineo è simmetrico rispetto all'asse x, per determinare l'area richiesta devo raddoppiare la differenza:

$$\mathcal{A}=2\left(\frac{1}{2}\cdot\overline{OH}\cdot\overline{CH}-\frac{1}{6}4\pi\right)=2\sqrt{\overline{CO}^2-\overline{CH}^2}-\frac{4}{3}\pi=\boldsymbol{4\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi}$$

B. Determina le equazioni delle circonferenze tangenti nel punto $A\ (2;1)$ alla retta $t$ di equazione $y=\frac{1}{2}x$ e aventi raggio $\sqrt{5}$.

Determino l'equazione della retta normale, che è perpendicolare alla retta t e passante per il punto A:

$$y-1=-2(x-2) \qquad y=-2x+5$$

Il centro appartiene alla normale, quindi ha generiche coordinate $C(x;\ -2x+5)$. Pongo la distanza del centro dalla tangente uguale al raggio:

$$\frac{|x+4x-10|}{\sqrt{1+4}}=\sqrt{5} \qquad |5x-10|=5 \qquad |x-2|=1 \qquad x-2=\pm1 \qquad x_1=3 \quad x_2=1$$

La prima circonferenza ha centro $C_1(3;\ -1)$ e la seconda $C_2(1;\ 3)$, perciò posso determinare le equazioni delle circonferenze:

$$\mathcal{C}_1:\ (x-3)^2+(y+1)^2=5 \qquad \boldsymbol{x^2+y^2-6x+2y+5=0}$$

$$\mathcal{C}_2:\ (x-1)^2+(y-3)^2=5 \qquad \boldsymbol{x^2+y^2-2x-6y+5=0}$$