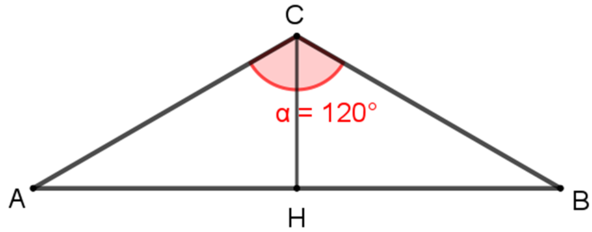
1. Calcola il perimetro e l'area di un triangolo isoscele con l'angolo al vertice di $120°$ e la base di $20\sqrt{3}\ cm$.



$$\overline{AB} = 20\sqrt{3}\ cm \qquad B\hat{C}A = \alpha = 120°$$

Traccio l'altezza CH relativa alla base. In un triangolo isoscele, questa è anche mediana e bisettrice, perciò:

$$B\hat{C}H = H\hat{C}A = \frac{\alpha}{2} = 60°$$

Posso determinare il lato obliquo CB, usando il teorema dei triangoli rettangoli:

$$\overline{HB} = \overline{CB} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \overline{CB} = \frac{\overline{HB}}{\sin 60°} = 20\ cm$$

Ora ho tutti gli elementi per calcolare perimetro e area:

$$2p = \overline{AB} + 2 \cdot \overline{BC} = \mathbf{20\left(\sqrt{3}+2\right)\ cm} \qquad \mathcal{A} = \frac{1}{2}\,\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \sin 120° = \mathbf{100\sqrt{3}\ cm^2}$$

2. Verifica che un triangolo, con due lati di misura a e $2a$ e avente la tangente dell'angolo compreso uguale a $\sqrt{15}$ è isoscele.

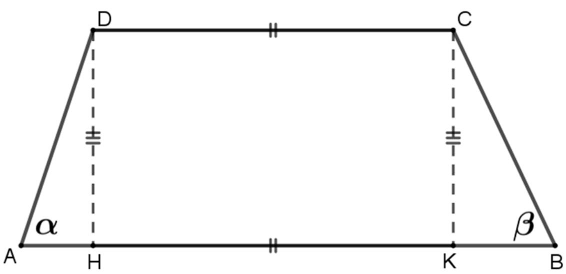
Applico il teorema di Carnot per determinare il terzo lato, ma prima determino il valore del coseno a partire dalla tangente:

$$\sqrt{15} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad 15\cos^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{a^2 + (2a)^2 - 2 \cdot a \cdot 2a \cdot \cos\alpha} = \sqrt{a^2 + 4a^2 - a^2} = 2a$$

Anche il terzo lato misura $2a$, perciò è **il triangolo è isoscele**.

3. Nel trapezio ABCD, la base minore DC misura $5a\sqrt{2}$ e l'altezza DH misura $3a\sqrt{2}$; si sa inoltre che, dette α l'ampiezza dell'angolo $D\hat{A}B$ e β quella dell'angolo $A\hat{B}C$, è $\tan\alpha = 3$ e $\cos\beta = \frac{\sqrt{22}}{11}$. Determina la misura della base maggiore AB del trapezio.



$$\overline{CD} = 5a\sqrt{2} \qquad \overline{DH} = 3a\sqrt{2} \qquad \tan\alpha = 3 \qquad \cos\beta = \frac{\sqrt{22}}{11}$$

Applico i teoremi dei triangoli rettangoli al triangolo AHD, dove DH è l'altezza del trapezio:

$$\overline{DH} = \overline{AH}\tan\alpha \quad \Rightarrow \quad \overline{DH} = 3\overline{AH} \quad \Rightarrow \quad \overline{AH} = a\sqrt{2}$$

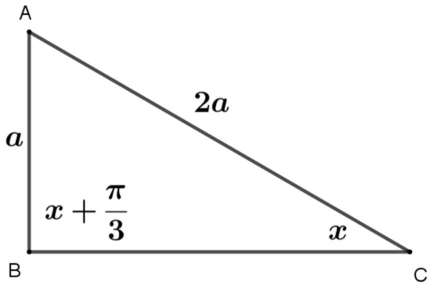
Le due altezze sono uguali, $\overline{DH} = \overline{CK}$. Considero il triangolo rettangolo KBC:

$$\overline{CK} = \overline{KB}\tan\beta \quad \Rightarrow \quad \overline{KB} = \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\overline{CK} = \frac{\frac{\sqrt{22}}{11}}{\sqrt{1-\frac{22}{121}}}3a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{22}}{11} \cdot \frac{11}{3\sqrt{11}} \cdot 3a\sqrt{2} = 2a$$

A questo punto posso calcolare la lunghezza della base maggiore del trapezio:

$$\overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HK} + \overline{KB} = \overline{AH} + \overline{DC} + \overline{KB} = a\sqrt{2} + 5a\sqrt{2} + 2a = \mathbf{2a\left(3\sqrt{2}+1\right)}$$

4. In un triangolo un lato misura a e l'altro $2a$. Calcola gli angoli a essi opposti sapendo che uno supera l'altro di $60°$.



Ricordo che a lato maggiore è opposto l'angolo maggiore, perciò il triangolo non può che essere disegnato come quello a lato. Applico ora il teorema dei seni:

$$\frac{\overline{AB}}{\sin x} = \frac{\overline{AC}}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\sin x} = \frac{2a}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$$

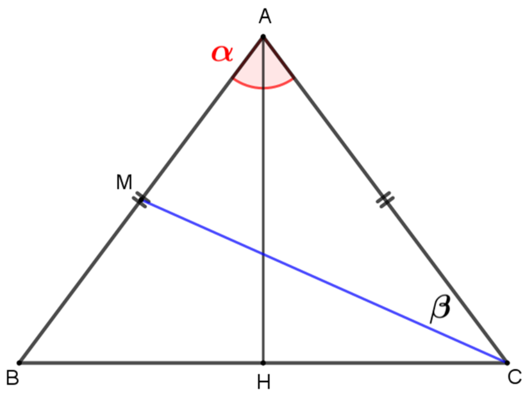
Da questa relazione ricavo l'equazione:

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 2\sin x \quad \Rightarrow \quad 3\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$$

$$2\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - \frac{\pi}{6} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{6}$$

I due angoli hanno ampiezza: **30°** e **90°**.

5. È dato un triangolo ABC, isoscele sulla base BC, di cui conosce il lato $\overline{AB} = 10\,a$, il coseno dell'angolo al vertice, $\cos B\hat{A}C = \frac{7}{25}$. Determina la misura del perimetro e l'area del triangolo. Detto poi M il punto medio di AB, determina CM e $\sin M\hat{C}A$.



$$\overline{AB} = 10\,a \qquad \cos\alpha = \frac{7}{25} \qquad 2p?\ \mathcal{A}? \qquad \overline{AM} = \overline{MB} \qquad \overline{CM}?\ \sin\beta\,?$$

Traccio l'altezza AH relativa alla base BC. In un triangolo isoscele, l'altezza relativa alla base è anche bisettrice dell'angolo al vertice e mediana della base, perciò posso determinare il coseno dell'angolo $H\hat{A}B$ con le formule di bisezione:

$$H\hat{A}B = \frac{1}{2}B\hat{A}C = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \frac{3}{5}$$

Applicando i teoremi dei triangoli rettangoli:

$$\overline{BH} = \overline{AB}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = 6a$$

Posso determinare perimetro e area del triangolo dato:

$$2p = 2\,\overline{AB} + 2\,\overline{BH} = \mathbf{32\,a} \qquad \mathcal{A} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AB}\cdot\sin\alpha = 50\,a^2\sqrt{1-\frac{7^2}{25^2}} = 50\,a^2\sqrt{\frac{(25-7)(25+7)}{25^2}} = \mathbf{48\,a^2}$$

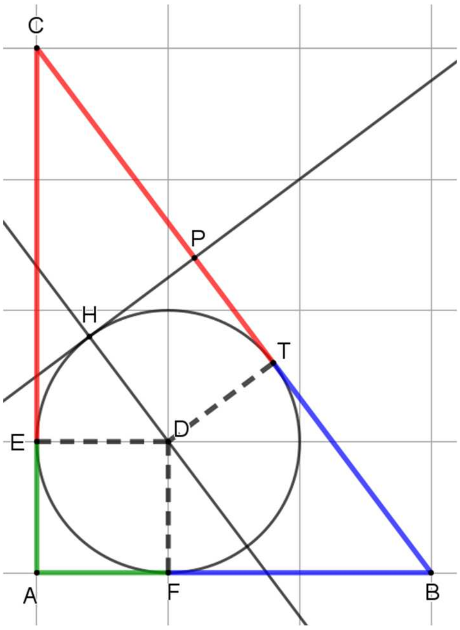
Nel triangolo MCA, dove MC è la mediana del lato AB, come richiesto dal testo, conosco la misura dei lati AM e AC e la misura dell'angolo di vertice A, perciò, applicando il teorema del coseno posso determinare la misura della mediana MC:

$$\overline{MC} = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{AC}^2 - 2\cdot\overline{AM}\cdot\overline{AC}\cdot\cos\alpha} = \sqrt{25a^2 + 100a^2 - 100a^2\cdot\frac{7}{25}} = \mathbf{a\sqrt{97}}$$

Ora posso applicare il teorema dei seni:

$$\frac{\overline{AM}}{\sin\beta} = \frac{\overline{MC}}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{\overline{AM}}{\overline{MC}}\sin\alpha = \frac{5a}{a\sqrt{97}}\cdot\frac{24}{25} = \mathbf{\frac{24\sqrt{97}}{485}}$$

6. In un triangolo rettangolo ABC, rettangolo in A, $\sin A\hat{C}B = \frac{3}{5}$. Sapendo che l'area del triangolo misura 6, determina le misure dei lati del triangolo e del raggio della circonferenza inscritta. Sia T il punto in cui la circonferenza inscritta nel triangolo tocca l'ipotenusa CB e sia P quel punto del segmento CT tale che la perpendicolare a CB in P sia la tangente alla circonferenza. Quanto misura CP?



$$\sin A\hat{C}B = \frac{3}{5} \qquad \mathcal{A} = 6 \qquad \overline{AB}?\ \overline{BC}?\ \overline{CA}?\ \overline{DE}?\overline{CP}?$$

Uso l'area e i teoremi dei triangoli rettangoli per determinare le misure dei lati, sapendo che $\cos A\hat{C}B = \sqrt{1-\sin^2 A\hat{C}B} = \frac{4}{5}$:

$$\begin{cases} \overline{AC} = \overline{BC}\cos A\hat{C}B \\ \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cdot\sin A\hat{C}B = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{AC} = \frac{4}{5}\overline{BC} \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\overline{BC}^2\cdot\frac{3}{5} = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{\overline{AC} = 4} \\ \boldsymbol{\overline{BC} = 5} \end{cases}$$

E quindi il terzo lato è $\boldsymbol{\overline{AB} = 3}$. Indicato con r il raggio della circonferenza inscritta, che risulta essere tangente ai lati AB, BC e CA rispettivamente in F, T ed E, dal teorema delle tangenti so che: $\overline{CE} = \overline{CT} = 4-r$, $\overline{AE} = \overline{AF} = r$, $\overline{BF} = \overline{BT} = 3-r$, perché il quadrilatero AFDE è un quadrato di lato r. Posso, quindi, ricavare il raggio:

$$\overline{BC} = \overline{CT} + \overline{BT} = 4-r+3-r = 7-2r$$

E dato che l'ipotenusa $\overline{BC} = 5$, $\boldsymbol{r = 1}$.

Traccio la perpendicolare a BC in P, in modo tale che sia tangente alla circonferenza inscritta in H. Siccome il raggio tracciato per il punto di tangenza è perpendicolare alla tangente, il quadrilatero DTPH è un quadrato di lato pari al raggio. Perciò, dato che il segmento $\overline{CT} = 3$, sottraendo il raggio ottengo $\boldsymbol{\overline{CP} = 2}$.