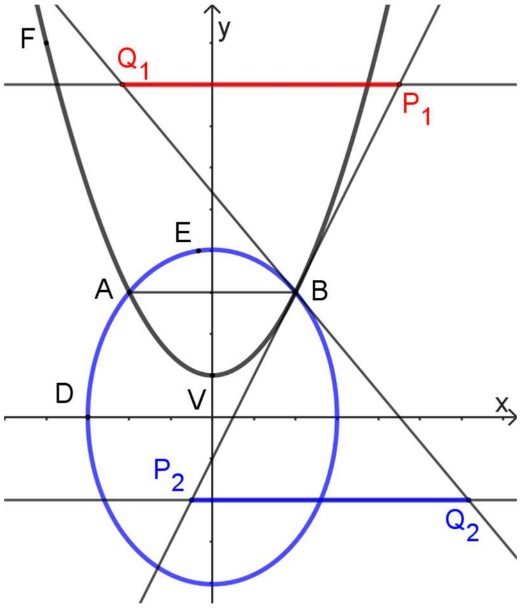
1. Scrivi l'equazione dell'ellisse con centro nell'origine, con un vertice in $D(-3,0)$ e passante per il punto $E\left(-\frac{1}{3},4\right)$, l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y di vertice $V(0,1)$ e passante per $F(-4,9)$ e determina i loro punti di intersezione A e B, con B nel primo quadrante. Nel punto B traccia le tangenti alle due curve e su di esse determina i punti P e Q in modo che $PQ \parallel AB$ e $\overline{PQ} = \frac{20}{3}$.



L'equazione dell'ellisse con centro nell'origine ha generica equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Avendo vertice in $D(-3,0)$: $a=3$. A questo punto impongo il passaggio dell'ellisse per E, sostituendo le sue coordinate nella generica equazione:

$$\frac{1}{81}+\frac{16}{b^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{16}{b^2}=\frac{80}{81} \quad \Rightarrow \quad b^2=\frac{81}{5} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{x^2}{9}+\frac{5y^2}{81}=1}$$

La parabola che ha un vertice sull'asse y ha asse di simmetria coincidente con l'asse y, perciò ha generica equazione: $y=ax^2+c$, e posso determinarne l'equazione sostituendo le coordinate del vertice e del punto F:

$$\begin{cases} 1=0+c \\ 9=16a+c \end{cases} \qquad \begin{cases} c=1 \\ a=\dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \boldsymbol{y=\frac{1}{2}x^2+1}$$

Determino i punti di intersezione tra parabola ed ellisse:

$$\begin{cases} x^2=2y-2 \\ 9x^2+5y^2=81 \end{cases} \qquad 9\,(2y-2)+5y^2-81=0 \qquad 5y^2+18y-99=0$$

$$y_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{9^2+99\cdot 5}}{5}=\frac{-9\pm 3\sqrt{9+55}}{5}=\frac{-9\pm 24}{5}=\left\langle \begin{array}{l} -\dfrac{33}{5} \\ 3 \end{array}\right.$$

La parabola ha concavità rivolta verso l'alto e vertice sul semiasse positivo delle ordinate, perciò $y\geq 1$ per ogni punto della parabola, quindi la soluzione $-\frac{33}{5}$ non è accettabile. Determino le coordinate dei punti:

$$\begin{cases} y=3 \\ x^2=2y-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=3 \\ x=\pm 2 \end{cases} \qquad A(-2,3) \qquad \boldsymbol{B(2,3)}$$

Determino le equazioni delle tangenti, rispettivamente all'ellisse e alla parabola, passanti per B. Applico la formula di sdoppiamento:

$$\frac{xx_B}{9}+\frac{5yy_B}{81}=1 \qquad 18x+15y=81 \qquad \boldsymbol{6x+5y=27}$$

$$\frac{y+y_B}{2}=\frac{1}{2}xx_B+1 \qquad \frac{y+3}{2}=x+1 \qquad \boldsymbol{2x-y-1=0}$$

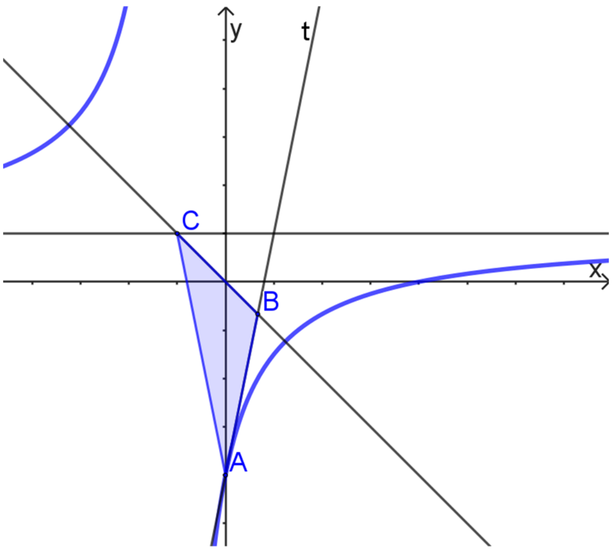
Il segmento che ha per estremi i punti A e B è parallelo all'asse x, dato che A e B hanno la stessa ordinata, perciò anche i punti P e Q da determinare avranno la stessa ordinata, dove $P(x_P;2x_P-1)$ dato che P appartiene alla tangente alla parabola nel punto B, mentre $Q\left(x_Q;-\frac{6}{5}x_Q+\frac{27}{5}\right)$, dato che Q appartiene alla tangente all'ellisse nel punto B. Inoltre, la distanza tra i due punti sarà data dalla differenza tra le ascisse in valore assoluto:

$$\begin{cases} y_P=y_Q \\ |x_P-x_Q|=\dfrac{20}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_P-1=-\dfrac{6}{5}x_Q+\dfrac{27}{5} \\ |x_P-x_Q|=\dfrac{20}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x_P+3x_Q-16=0 \\ x_P=x_Q\pm\dfrac{20}{3} \end{cases}$$

$$5x_Q+\frac{100}{3}+3x_Q-16=0 \qquad 8x_Q=-\frac{52}{3} \qquad \boldsymbol{Q_1\left(-\frac{13}{6};8\right)} \qquad \boldsymbol{P_1\left(\frac{9}{2};8\right)}$$

$$5x_Q-\frac{100}{3}+3x_Q-16=0 \qquad 8x_Q=\frac{148}{3} \qquad \boldsymbol{Q_2\left(\frac{37}{6};-2\right)} \qquad \boldsymbol{P_2\left(-\frac{1}{2};-2\right)}$$

2. Determina l'equazione della curva $y=\frac{2x-a}{bx+c}$, sapendo che ha per asintoto la retta $y=1$ e per tangente in $A(0,-4)$ la retta $t: y=5x-4$. Considera poi la retta passante per il centro di simmetria C e parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante, determinando la sua intersezione B con la retta t. Calcola l'area del triangolo ABC.



L'asintoto orizzontale della funzione omografica è dato da:

$$y=\frac{2}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{b}=1 \quad \Rightarrow \quad b=2$$

Impongo il passaggio della curva per il punto A, sostituendo le coordinate di A nell'equazione della funzione:

$$-4=\frac{-a}{c} \quad \Rightarrow \quad a=4c$$

L'equazione della funzione è ora: $y=\frac{2x-4c}{2x+c}$. Metto a sistema l'equazione della funzione omografica con quella della tangente e pongo $\Delta=0$ nella risolvente:

$$\begin{cases} y=\dfrac{2x-4c}{2x+c} \\ y=5x-4 \end{cases} \qquad (5x-4)(2x+c)=2x-4c$$

$$10x^2+5x\,(c-2)=0$$

Trattandosi di un'equazione incompleta, il discriminante sarà nullo solo nel caso in cui si tratti di un'equazione monomia, ovvero:

$$c-2=0 \qquad c=2$$

Posso, quindi, scrivere l'equazione della funzione omografica:

$$y=\frac{2x-8}{2x+2} \qquad \boldsymbol{y=\frac{x-4}{x+1}}$$

Tale funzione ha centro di simmetria nel punto $C(-1;1)$ e la retta parallela alla bisettrice di secondo e quarto quadrante che passa per C è proprio la bisettrice. Determino le coordinate del punto B, intersezione della tangente e della bisettrice:

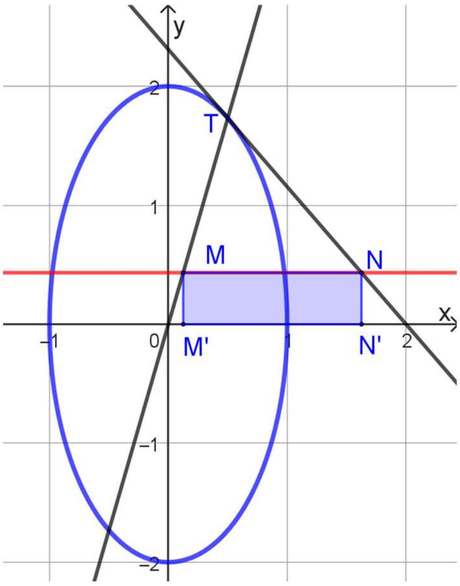
$$\begin{cases} y=-x \\ y=5x-4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 5x-4=-x \\ y=-x \end{cases} \qquad \boldsymbol{B\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)}$$

Per calcolare l'area del triangolo ABC, determino la lunghezza del lato BC, che giace sulla bisettrice, e poi calcolo la distanza di A da questa retta, determinando così l'altezza del triangolo. A questo punto posso calcolare l'area:

$$\overline{BC}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}+1\right)^2+\left(-\frac{2}{3}-1\right)^2}=\frac{5}{3}\sqrt{2} \qquad h=d(A,BC)=\frac{|0-4|}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot d(A,BC)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}\sqrt{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{10}{3}}$$

3. Dopo aver determinato l'equazione dell'ellisse avente vertice nel punto $(1;\ 0)$ e tangente alla retta $t: 2x + y\sqrt{3} - 4 = 0$, detto T il punto di tangenza, conduci una parallela all'asse x posta nel semipiano $y \geq 0$, in modo che, dette M ed N rispettivamente le intersezioni con il segmento OT (O origine degli assi) e con la retta t, e M' ed N' rispettivamente le proiezioni di M ed N sull'asse x, il perimetro del quadrilatero MM'N'N sia uguale a $\frac{\sqrt{3}+6}{2}$.



L'equazione della generica ellisse con vertice in $(1, 0)$ è: $x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Metto a sistema l'equazione dell'ellisse con quella della retta tangente e pongo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}y + 2 \\ x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \qquad b^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}y + 2\right)^2 + y^2 = b^2$$

$$\frac{3}{4}b^2y^2 + 4b^2 - 2\sqrt{3}b^2y + y^2 - b^2 = 0$$

$$(3b^2 + 4)\, y^2 - 8\sqrt{3}\, b^2y + 12b^2 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = \left(4\sqrt{3}\, b^2\right)^2 - 12\, b^2(3b^2 + 4) = 0$$

$$12b^2\,(4b^2 - 3b^2 - 4) = 0 \qquad \begin{array}{c} b^2 = [0] \\ b^2 = 4 \end{array}$$

L'equazione dell'ellisse è:

$$\mathbf{4x^2 + y^2 = 4}$$

Determino le coordinate del punto di tangenza T, sostituendo il valore appena ottenuto per b nella risolvente:

$$16y^2 - 32\sqrt{3}\, y + 48 = 0 \qquad y^2 - 2y\sqrt{3} + 3 = 0 \qquad \left(y - \sqrt{3}\right)^2 = 0 \qquad \boldsymbol{T\left(\frac{1}{2};\ \sqrt{3}\right)}$$

L'equazione della retta OT è: $y = 2x\sqrt{3}$. La retta parallela all'asse x ha generica equazione $y = h$, con $0 \leq h \leq \sqrt{3}$, perciò i punti M e N, che appartengono rispettivamente alla retta OT e alla retta tangente t, hanno coordinate:

$$M\left(\frac{\sqrt{3}}{6}h; h\right) \qquad N\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}h + 2; h\right)$$

I lati del rettangolo MM'N'N hanno misure:

$$\overline{MM'} = \overline{NN'} = h \qquad \overline{MN} = \overline{M'N'} = -\frac{\sqrt{3}}{2}h + 2 - \frac{\sqrt{3}}{6}h = -\frac{2}{3}h\sqrt{3} + 2$$

Pongo il perimetro del rettangolo uguale al valore dato:

$$2\left(h - \frac{2}{3}h\sqrt{3} + 2\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \qquad 2h\,\left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

$$h\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3} - 2}{3} = \frac{\sqrt{3} - 2}{4} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3}{4\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y = \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

4. Verifica che l'iperbole che ha il centro nell'origine e l'asse trasverso sull'asse delle ascisse e passa per i punti $A(3,\sqrt{7})$ e $B(4,\sqrt{14})$ è equilatera.
   A. Scrivi le equazioni delle rette tangenti all'iperbole trovata condotte dal punto $P(1,7)$, indicando con t quella di coefficiente angolare positivo.
   B. Detto F il fuoco dell'iperbole di ascissa positiva, verifica che l'angolo $P\hat{F}T$ è retto, essendo T il punto di tangenza della retta t con l'iperbole.

Determino l'equazione dell'iperbole che ha centro nell'origine e asse trasverso sull'asse delle ascisse, equazione generica $A^2x^2 - B^2y^2 = 1$, sostituendo le coordinate dei due punti e risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 9A^2 - 7B^2 = 1 \\ 16A^2 - 14B^2 = 1 \end{cases} \quad \overline{-7A^2 + 7B^2 = 0} \qquad \begin{cases} A^2 = B^2 \\ 2A^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A^2 = \frac{1}{2} \\ B^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1 \qquad \boldsymbol{x^2 - y^2 = 2}$$

Quella ottenuta è l'equazione di un'**iperbole equilatera**, a verifica di quanto affermato dal testo.

A. Verificato che il punto P non appartiene all'iperbole $(1 - 49 \neq 2)$, metto a sistema l'equazione del fascio di rette con centro in P, $y - 7 = m(x-1)$, con l'equazione dell'iperbole e pongo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} y = m(x-1) + 7 \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases} \qquad x^2 - \left(m^2(x-1)^2 + 49 + 14m(x-1)\right) - 2 = 0$$

$$x^2 - m^2x^2 + 2m^2x - m^2 - 49 - 14mx + 14m - 2 = 0 \qquad x^2(1-m^2) + 2mx(m-7) - m^2 + 14m - 51 = 0$$

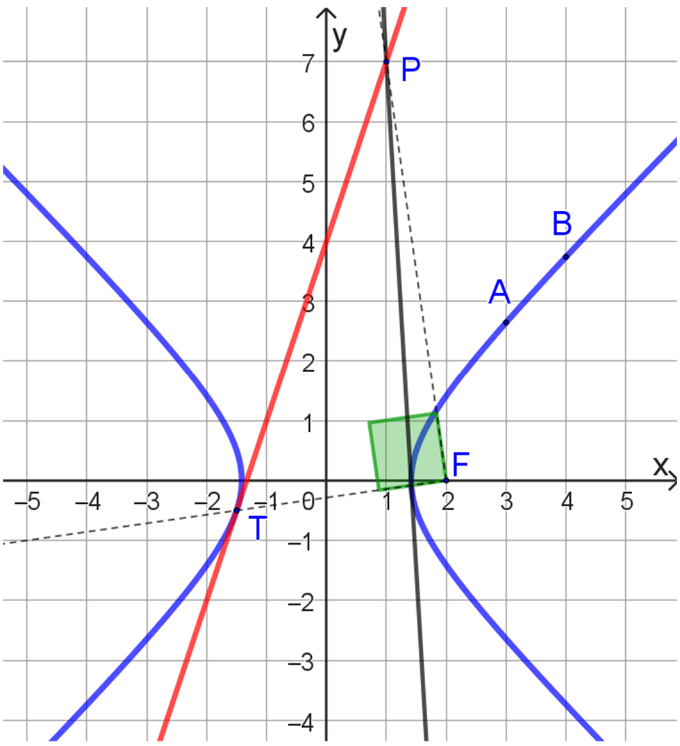
$$\frac{\Delta}{4} = m^2(m-7)^2 - (1-m^2)(-m^2 + 14m - 51) = 0$$

$$m^4 - 14m^3 + 49m^2 + m^2 - 14m + 51 - m^4 + 14m^3 - 51m^2 = 0$$

$$m^2 + 14m - 51 = 0 \qquad m_{1,2} = -7 \pm \sqrt{49 + 51} = -7 \pm 10 = \left\langle \begin{matrix} -17 \\ 3 \end{matrix} \right.$$

$$y = -17x + 24 \qquad \boldsymbol{t: y = 3x + 4}$$

B.



Determino le coordinate del fuoco:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{2} = 2 \qquad F(2,0)$$

Determino le coordinate del punto di tangenza, sostituendo $m = 3$ nell'equazione risolvente:

$$-8x^2 - 24x - 18 = 0 \qquad 4x^2 + 12x + 9 = 0$$

Come previsto, l'equazione ottenuta è un quadrato di binomio, perciò è semplice determinare le coordinate di T:

$$(2x+3)^2 = 0 \qquad \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = 3\left(-\frac{3}{2}\right) + 4 \end{cases} \qquad \boldsymbol{T\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)}$$

Per verificare che l'angolo $P\hat{F}T$ sia retto, determino i coefficienti angolari di PF e FT e verifico che: $m_{PF} \cdot m_{FT} = -1$

$$m_{PF} = \frac{y_P - y_F}{x_P - x_F} = \frac{7-0}{1-2} = -7 \qquad m_{FT} = \frac{0 + \frac{1}{2}}{2 + \frac{3}{2}} = \frac{1}{7}$$

$$m_{PF} \cdot m_{FT} = -7 \cdot \frac{1}{7} = -1 \qquad c.v.d.$$