1. Determina in forma algebrica le soluzioni delle seguenti equazioni in campo complesso:

$$z^6+9z^3+8=0 \qquad\qquad z^3=-2i$$

Scompongo il trinomio e applico la legge di annullamento del prodotto:

$$(z^3+8)(z^3+1)=0 \quad\Rightarrow\quad (z+2)(z^2-2z+4)(z+1)(z^2-z+1)=0$$

$$\boldsymbol{z_1=-2} \qquad \boldsymbol{z_{2,3}=1\pm i\sqrt{3}} \qquad \boldsymbol{z_4=-1} \qquad \boldsymbol{z_{5,6}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}}$$

$$z^3+2i=0 \quad\Rightarrow\quad z^3-2i^3=0 \quad\Rightarrow\quad \left(z-\sqrt[3]{2}i\right)\left(z^2+\sqrt[3]{2}iz-\sqrt[3]{4}\right)=0$$

$$\boldsymbol{z_1=i\sqrt[3]{2}} \qquad \boldsymbol{z_{2,3}=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\left(i\pm\sqrt{3}\right)}$$

Oppure determino le radici richieste:

$$z=\sqrt[3]{2\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{3}{2}\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3}{2}\pi+2k\pi}{3}\right)$$

Determino le tre soluzioni:

$$k=0:\ z_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=\boldsymbol{i\sqrt[3]{2}} \qquad k=1:\ z_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)=\sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=\boldsymbol{-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)}$$

$$k=2:\ z_3=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)=\sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\left(\sqrt{3}-i\right)}$$

2. Posto $k=73^2$, stabilisci quanto vale il numero complesso i^k.

$$73=72+1=4\cdot 18+1 \quad\Rightarrow\quad 73^2=(4\cdot18+1)^2=4^2\cdot18^2+4\cdot36+1=4\cdot(4\cdot18^2+36)+1$$

$$i^{73^2}=i^{4\cdot(4\cdot18^2+36)+1}=(i^4)^{4\cdot18^2+36}\cdot i^1=1\cdot i=\boldsymbol{i}$$

3. Scrivi il seguente numero complesso in forma esponenziale: $z=\sqrt{2}\left(\frac{4-4i}{|2-2i|}\right)-2$.

$$z=\sqrt{2}\frac{4(1-i)}{\sqrt{2^2+2^2}}-2=\sqrt{2}\frac{4(1-i)}{2\sqrt{2}}-2=2(1-i)-2=-2i=2\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)=\boldsymbol{2e^{\frac{3}{2}\pi i}}$$

4. È data l'equazione $z^4-2z^3+3z^2-2z+2=0$, dove $z\in\mathbb{C}$.
   A. Verifica che i e $-i$ sono soluzioni.
   B. Dopo averne abbassato il grado, determina le rimanenti soluzioni.

A. Per verificare che quelle date siano soluzioni, le sostituisco nell'equazione:

$$i^4-2i^3+3i^2-2i+2=1+2i-3-2i+2=0 \qquad\qquad i^4+2i^3+3i^2+2i+2=1-2i-3+2i+2=0$$

B. Applico l'algoritmo di Ruffini per abbassare il grado:

	1	-2	3	-2	2
i		i	-2i-1	-2i+2	-2
	1	-2+i	2-2i	2i	//
-i		-i	2i	-2i	
	1	-2	2	//	

Resta da risolvere l'equazione $z^2-2z+2=0$: $z_{3,4}=\boldsymbol{1\pm i}$

5. Trova le soluzioni complesse del sistema: $\begin{cases} |z-1-i| = 1 \\ Re\, z + Im\, z = 2 \end{cases}$

Sia $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, perciò il sistema diventa:

$$\begin{cases} |x+iy-1-i| = 1 \\ x+y=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2 = 1 \\ y = 2-x \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-1)^2+(1-x)^2 = 1 \\ y = 2-x \end{cases}$$

$$2(x-1)^2 = 1 \qquad x-1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

I due numeri sono: $\boldsymbol{z_1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) i}$ e $\boldsymbol{z_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) i}$.

6. Determina graficamente il numero delle soluzioni della seguente equazione parametrica nell'intervallo indicato, al variare del parametro in $\mathbb{R}$, tenendo presente che $\alpha = arc\sin\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} \sin x\ (\sin x + 2\cos x) = k + \frac{1}{2} \\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} - \alpha \end{cases}$$

Semplifico l'equazione parametrica, usando le formule di duplicazione e bisezione:

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x = k + \frac{1}{2} \qquad \frac{1-\cos 2x}{2} + \sin 2x = k + \frac{1}{2} \qquad 1 - \cos 2x + 2\sin 2x = 2k + 1$$

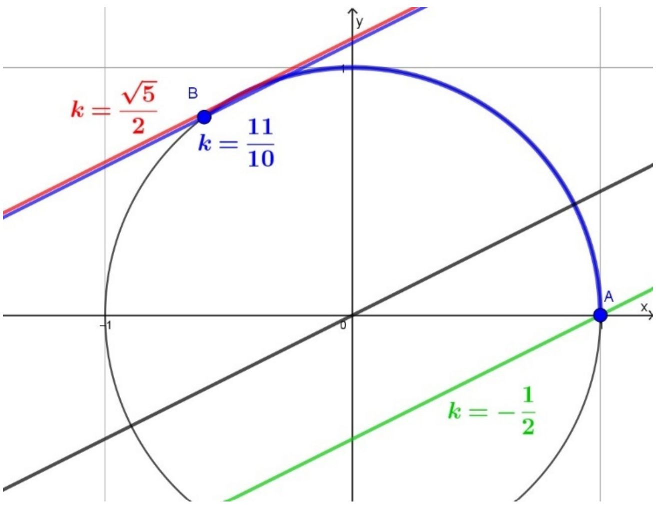
Il sistema diventa:

$$\begin{cases} 2\sin 2x - \cos 2x = 2k \\ 0 \le 2x \le \pi - 2\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} 2Y - X = 2k \\ X^2 + Y^2 = 1 \\ -\frac{3}{5} \le X \le 1; 0 \le Y \le 1 \end{cases}$$

Le limitazioni sono state trovate determinando le funzioni goniometriche dell'angolo:

$$\alpha = arc\sin\frac{\sqrt{5}}{5} \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \qquad \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin(\pi - 2\alpha) = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{4}{5} \qquad \cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = -2\cos^2\alpha + 1 = -\frac{3}{5}$$



Impongo il passaggio della retta per il punto $A\ (1,0)$:

$$0 - 1 = 2k \quad\Rightarrow\quad k = -\frac{1}{2}$$

Impongo il passaggio della retta per il punto $B\ \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$:

$$\frac{8}{5} + \frac{3}{5} = 2k \quad\Rightarrow\quad k = \frac{11}{10}$$

Determino la tangente, ponendo la distanza della generica retta del fascio dall'origine uguale al raggio:

$$\frac{|2k|}{\sqrt{5}} = 1 \quad\Rightarrow\quad k = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

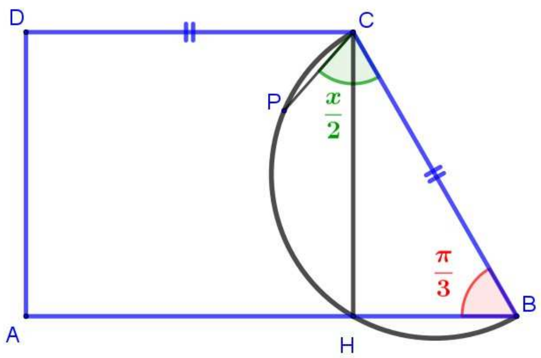
Visto l'andamento del fascio, la retta cercata avrà parametro positivo.

$$\boldsymbol{1\ soluzione\ per\ \ -\frac{1}{2} \le k < \frac{11}{10}} \qquad \boldsymbol{2\ soluzioni\ per\ \ \frac{11}{10} \le k \le \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

7. Sia ABCD un trapezio rettangolo avente la base maggiore $\overline{AB} = 3a$, il lato obliquo BC uguale alla base minore $\overline{CD} = 2a$. Dopo aver determinato gli elementi incogniti del trapezio, disegna la semicirconferenza di diametro BC che tagli la base maggiore AB in H. Sull'arco CH considera un punto P, poni $P\hat{C}B = \frac{x}{2}$ e studia la funzione:

$$f(x) = \frac{\overline{PD}^2 - \overline{PC}^2}{\overline{CD}^2}$$

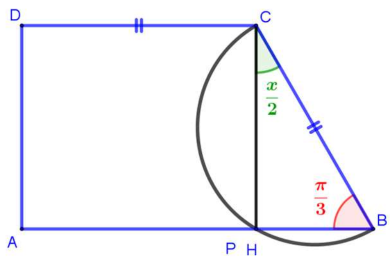
Rappresenta la funzione e determinane il minimo e il massimo, indicando i valori di x per cui si ottengono.



La semicirconferenza di diametro BC interseca la base maggiore AB in H, piede dell'altezza CH, visto che ogni triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo.
Non solo: dato che $\overline{BC} = 2a$, $\overline{HB} = \overline{AB} - \overline{DC} = a$ ed essendo BCH un triangolo rettangolo, visto che il cateto minore è metà dell'ipotenusa, $H\hat{B}C = \pi/3$.
Posso a questo punto ricavare le ultime misure:

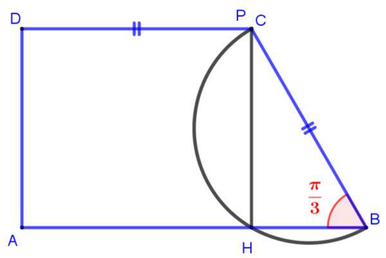
$$\overline{AD} = \overline{CH} = \overline{CB}\sin\frac{\pi}{3} = a\sqrt{3}$$

Analizzo i casi limite:



$$P \equiv H \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{3}$$

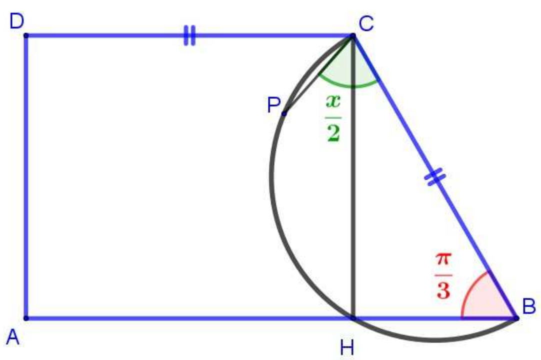
$$f(x) = \frac{\overline{DC}^2 + \overline{CH}^2 - \overline{CH}^2}{\overline{CD}^2} = 1 \qquad acc.$$



$$P \equiv C \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pi$$

$$f(x) = \frac{\overline{DC}^2 - 0}{\overline{CD}^2} = 1 \qquad acc.$$

Perciò: $\boldsymbol{\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi}$. Determino ora l'espressione analitica della funzione:



Applico il teorema di Carnot per determinare $\overline{PD}$, considerando il triangolo PCD, dove conosco $\overline{DC}$, l'angolo $P\hat{C}D = B\hat{C}D - B\hat{C}P = \frac{2}{3}\pi - \frac{x}{2}$, $\overline{CP}$ (dato il triangolo rettangolo PBC: $\overline{CP} = \overline{BC}\cos\frac{x}{2} = 2a\cos\frac{x}{2}$):

$$\overline{PD}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{PC}^2 - 2 \cdot \overline{DC} \cdot \overline{PC} \cdot \cos\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{x}{2}\right)$$

A questo punto ho tutti gli elementi per determinare la funzione:

$$f(x) = \frac{4a^2 + \overline{PC}^2 - 2 \cdot 2a \cdot 2a\cos\frac{x}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{2}\right) - \overline{PC}^2}{4a^2} = 1 + \cos^2\frac{x}{2} - \sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} =$$

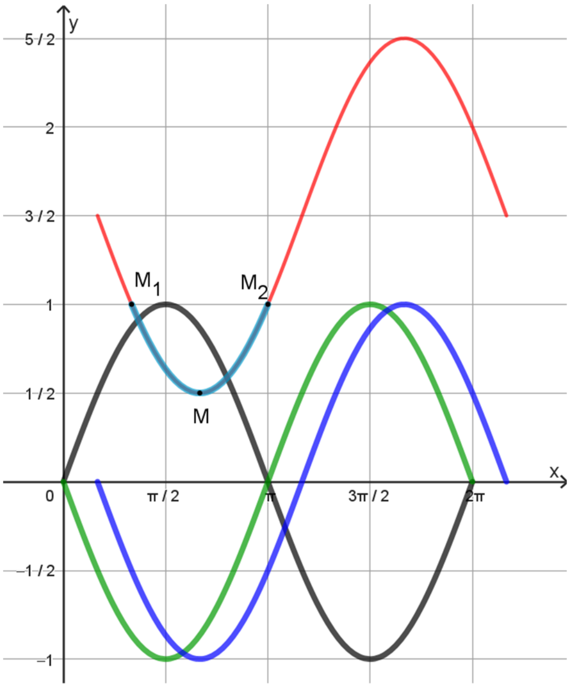
$$= 1 + \frac{1+\cos x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{3}{2} - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

L'espressione della funzione è:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{3}{2} - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \qquad \frac{\pi}{3} \le x \le \pi}$$

Oppure, equivalentemente: $f(x) = \frac{3}{2} + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Rappresento la funzione nell'intervallo indicato:



Rappresento, in nero, la funzione $y = \sin x$.

Rappresento, in verde, la funzione $\boldsymbol{y = -\sin x}$.

Traslo la funzione di un vettore $\vec{v}\ \left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$, ottenendo la funzione rappresentata in blu: $\boldsymbol{y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}$.

Faccio un'ultima traslazione, di un vettore $\vec{u}\ \left(0, \frac{3}{2}\right)$, ottenendo la funzione rappresentata in rosso: $\boldsymbol{y = \frac{3}{2} - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}$, sulla quale individuo l'intervallo $\frac{\pi}{3} \le x \le \pi$.

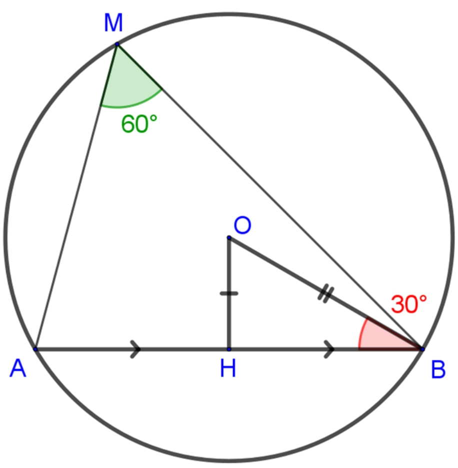
Nell'intervallo dato, è facile riconoscere il minimo e i massimi della funzione. Il minimo ha ordinata $1/2$, e posso determinarne l'ascissa:

$$\frac{3}{2} - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

Le coordinate del minimo sono: $\boldsymbol{M\left(\frac{2}{3}\pi; \frac{1}{2}\right)}$.

I due massimi sono negli estremi dell'intervallo considerato, perciò: $\boldsymbol{M_1\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)}$ e $\boldsymbol{M_2(\pi, 1)}$.

8. Date una circonferenza di raggio r e una sua corda AB a distanza $\frac{r}{2}$ dal centro O, determina un triangolo AMB con vertice M sul maggiore dei due archi AB in modo tale che $\overline{AM} + \overline{MB} = \sqrt{2}\,\overline{AB}$.



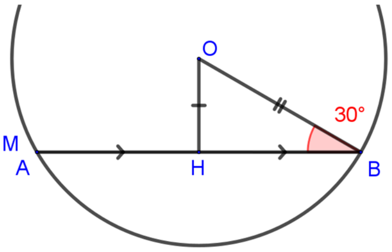
Considero il triangolo OHB, dove $\overline{OB} = r$ e $\overline{OH} = \frac{r}{2}$, $H \in AB$ e $OH \perp AB$. Trattandosi di un segmento perpendicolare alla corda e passante per il centro della circonferenza, H è il punto medio della corda, cioè $\overline{AH} = \overline{BH}$. Inoltre, il triangolo OHB, rettangolo per costruzione (visto che OH è la distanza del centro dalla corda AB), ha un cateto che è metà dell'ipotenusa, perciò $O\hat{B}H = 30°$.
Posso ricavare la lunghezza della corda AB:

$$\overline{AB} = 2\,\overline{HB} = 2\,\overline{OB}\cos 30° = r\sqrt{3}$$

Per il teorema della corda:

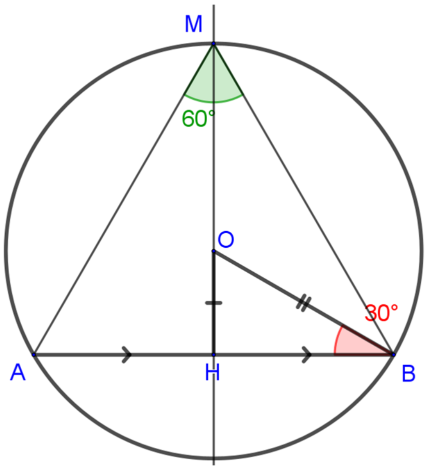
$$\overline{AB} = 2r\sin A\hat{M}B \quad \Rightarrow \quad \sin A\hat{M}B = \frac{r\sqrt{3}}{2r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad A\hat{M}B = 60°$$

Posto $A\hat{B}M = x$, considero i casi limite:



$$M \equiv A \quad \Rightarrow \quad x = 0: \quad \overline{AM} = 0 \qquad\qquad \overline{MB} = \overline{AB}$$

Perciò la relazione: $\overline{AM} + \overline{MB} = \sqrt{2}\,\overline{AB}$ NON è verificata!



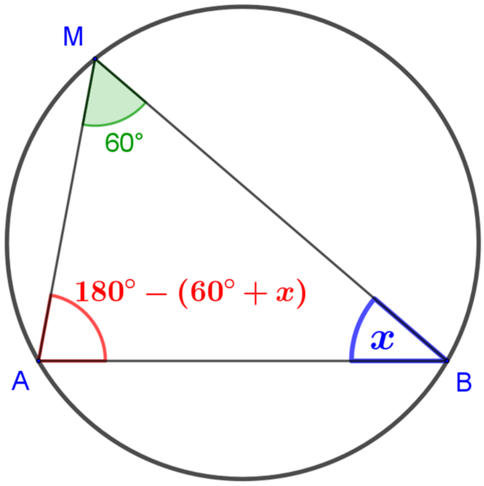
Il punto M si muove sull'arco di circonferenza AB maggiore. Considero il suo punto medio, dato dall'intersezione del diametro passante per H con la circonferenza: la posizione di M sull'arco compreso tra A e il punto medio dell'arco è simmetrica alla posizione di M tra il punto medio e l'estremo B della corda. Considero come seconda situazione limite quella in cui M coincide con il punto medio dell'arco, perciò:

$$x = \frac{\pi}{3}: \quad \overline{AM} = \overline{MB} = \overline{AB}$$

Perciò la relazione: $\overline{AM} + \overline{MB} = \sqrt{2}\,\overline{AB}$ NON è verificata!

Concludendo: $\boldsymbol{0 < x < \frac{\pi}{3}}$.

Determino l'equazione risolvente.



Applico il teorema della corda per determinare le misure di AM e MB in funzione dell'angolo x:

$$\overline{AM} = 2r\sin x$$

$$\overline{MB} = 2r\sin\left[\pi - \left(\frac{\pi}{3} + x\right)\right] = 2r\sin\left(\frac{2}{3}\pi - x\right)$$

L'equazione diventa:

$$2r\sin x + 2r\sin\left(\frac{2}{3}\pi - x\right) = \sqrt{2}\cdot r\sqrt{3}$$

$$2\sin x + \sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{6}$$

$$3\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$$

Applicando la formula dell'angolo aggiunto, ottengo:

$$2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} & \qquad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{12}} \\ x + \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}\pi & \qquad \boldsymbol{x = \frac{7}{12}\pi} \end{array}$$

Come previsto precedentemente, le due soluzioni sono simmetriche.