

1. Determina la distanza tra il punto $P(2, 1, 1)$ e la retta $r: \begin{cases} x + y = z + 1 \\ z = -y + 1 \end{cases}$.

Esame di Stato 2016, sessione suppletiva, quesito 7

Determino le equazioni parametriche della retta: $\begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = k \\ z = 1 - k \end{cases}$ per individuare i coefficienti direttivi $\vec{v}(-2, 1, -1)$.

Posso, quindi, determinare l'equazione del piano π , perpendicolare alla retta e passante per il punto P. Essendo perpendicolare alla retta, conosco i parametri direttori della direzione normale al piano:

$$\pi: v_x(x - x_P) + v_y(y - y_P) + v_z(z - z_P) = 0 \quad -2(x - 2) + 1(y - 1) - 1(z - 1) = 0 \quad \pi: 2x - y + z - 4 = 0$$

Determino il punto di intersezione tra il piano π e la retta data, H, mettendo a sistema le equazioni:

$$\begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = k \\ z = 1 - k \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} 2(2 - 2k) - k + 1 - k - 4 &= 0 & 4 - 4k - k + 1 - k - 4 &= 0 & k &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Sostituendo il parametro così determinato nell'equazione della retta, determino le coordinate di H: $H\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$.

Per determinare la distanza del punto P dalla retta data non resta altro da fare che determinare la distanza tra P e H:

$$PH = \sqrt{(x_P - x_H)^2 + (y_P - y_H)^2 + (z_P - z_H)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{1}{6}\sqrt{4 + 25 + 1} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

2. Una sfera, il cui centro è il punto $C(-2; -1; 2)$ è tangente al piano π avente equazione $2x - 2y + z - 9 = 0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?

Esame di Stato 2016, sessione ordinaria, quesito 4

I parametri direttori della direzione normale al piano sono: $\vec{v}(2; -2; 1)$. Determino la retta perpendicolare al piano, con il quale condivide i coefficienti direttivi, e passante per il centro della sfera C, poi metto a sistema le equazioni parametriche della retta con l'equazione del piano, per determinare le coordinate del punto di tangenza T:

$$\begin{cases} x = -2 + 2k \\ y = -1 - 2k \\ z = 2 + k \\ 2x - 2y + z - 9 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} 2(-2 + 2k) - 2(-1 - 2k) + 2 + k - 9 &= 0 & -4 + 4k + 2 + 4k + 2 + k - 9 &= 0 & k &= 1 \end{aligned}$$

Sostituendo il parametro così determinato nell'equazione della retta, determino le coordinate di T: $T(0; -3; 3)$.

Il raggio della sfera è dato dalla distanza tra il centro e il punto di tangenza:

$$r = \overline{CT} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$$

3. Dato il piano $\pi: x + 2y - z + 1 = 0$ ed il suo punto $P(1, 0, 2)$, si determinino le sfere di raggio $\sqrt{6}$ tangenti a π in P.

Esame di Stato 2017, sessione ordinaria, quesito 7

I parametri direttori della direzione normale al piano sono: $\vec{v}(1; 2; -1)$. Determino la retta perpendicolare al piano, con il quale condivide i coefficienti direttivi, e passante per il punto P, sulla quale si trova il centro della sfera:

$$\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2k \\ z = 2 - k \end{cases}$$

Il centro della sfera ha coordinate generiche $C(1 + k, 2k, 2 - k)$. Pongo la distanza del generico centro dal punto P uguale al raggio dato:

$$\begin{aligned} \overline{CP} = \sqrt{6} &\Rightarrow \overline{CP}^2 = 6 &\Rightarrow (1 + k - 1)^2 + (2k - 0)^2 + (2 - k - 2)^2 &= 6 \\ k^2 + 4k^2 + k^2 &= 6 &k^2 &= 1 &k &= \pm 1 \end{aligned}$$

I due centri hanno coordinate: $C_1(2, 2, 1)$ e $C_2(0, -2, 3)$.

Le due sfere hanno equazione:

$$\begin{aligned} S_1: (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 &= 6 & x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 2z + 3 &= 0 \\ S_2: (x - 0)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 &= 6 & x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 6z + 7 &= 0 \end{aligned}$$

4. Dati i punti $A(-2, 0, 1)$, $B(1, 1, 2)$, $C(0, -1, -2)$, $D(1, 1, 0)$, determinare l'equazione del piano α passante per i punti A, B, C e l'equazione della retta passante per D e perpendicolare al piano α .

Esame di Stato 2016, sessione straordinaria, quesito 9

La generica equazione del piano è: $ax + by + cz + d = 0$. Sostituisco le coordinate di A, B e C, ottenendo un sistema con le incognite a , b , c e d . Ricavo i primi tre parametri in funzione del quarto, d , dopo aver sommato la seconda e la terza equazione per ottenere a , poi sostituisco il suo valore nella prima equazione per ottenere c e, infine, sostituisco il valore di c nella terza equazione per ottenere b :

$$\begin{array}{l} A: \begin{cases} -2a + c + d = 0 \\ B: \begin{cases} a + b + 2c + d = 0 \\ C: \begin{cases} -b - 2c + d = 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} a = -2d \\ 4d + c + d = 0 \\ b = -2c + d \end{cases} \quad \begin{cases} a = -2d \\ c = -5d \\ b = 11d \end{cases}$$

$$-2dx + 11dy - 5dz + d = 0 \quad \alpha: 2x - 11y + 5z - 1 = 0$$

I parametri direttori della direzione normale al piano sono: $\vec{v}(2; -11; 5)$. Determino la retta perpendicolare al piano, con il quale condivide i coefficienti direttivi, e passante per il punto D, come richiesto:

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 1 - 11k \\ z = 5k \end{cases}$$

5. Nello spazio sono dati due piani α e β rispettivamente di equazione: $\alpha: x - 3y + z - 5 = 0$, $\beta: x + 2y - z + 3 = 0$. Dopo aver determinato l'equazione parametrica della retta r comune ad entrambi, verificare che essa appartiene al piano $\gamma: 3x + y - z + 1 = 0$.

Esame di Stato 2015, sessione straordinaria, quesito 4

La retta comune è data dall'intersezione dei due piani: lavoro sulle equazioni dei piani, prima sommandole tra loro e poi sottraendole, per ottenere le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x - 3y + z - 5 = 0 \\ x + 2y - z + 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ 5y - 2z + 8 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = k \\ y = 2k - 2 \\ 10k - 10 - 2z + 8 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = k \\ y = 2k - 2 \\ z = 5k - 1 \end{cases}$$

Per verificare che la retta appartenga al piano γ , verifico la perpendicolarità tra la retta e i parametri direttori della direzione normale al piano e poi scelgo un punto della retta e verifico che appartiene al piano:

parametri direttori della direzione normale al piano: $\vec{v}_\gamma(3; 1; -1)$; coefficienti direttivi della retta $\vec{v}_r(1; 2; 5)$

$$\vec{v}_\gamma \perp \vec{v}_r \Leftrightarrow \vec{v}_\gamma \cdot \vec{v}_r = 0: 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = 0 \quad \text{verificato}$$

Sia $P(0, -2, -1)$ un punto appartenente alla retta: sostituisco le sue coordinate nell'equazione del piano, per verificare che appartiene anche al piano:

$$3 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) + 1 = 0 \quad \text{verificato}$$

La retta appartiene al piano γ .

6. Dati i punti $A(2, 0, -1)$ e $B(-2, 2, 1)$, provare che il luogo geometrico dei punti P dello spazio, tali che $\overline{PA} = \sqrt{2} \cdot \overline{PB}$, è costituito da una superficie sferica $\mathcal{S}$ e scrivere la sua equazione cartesiana. Verificare che il punto $T(-10, 8, 7)$ appartiene a $\mathcal{S}$ e determinare l'equazione del piano tangente in T a $\mathcal{S}$.

Esame di Stato 2019, sessione ordinaria, quesito 4

Dato il generico punto $P(x; y; z)$, so che $\overline{PA} = \sqrt{2} \cdot \overline{PB} \Rightarrow \overline{PA}^2 = 2\overline{PB}^2$, perciò:

$$\begin{aligned} (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 &= 2((x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 + (z - z_B)^2) \\ (x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 &= 2((x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2) \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 + 2z + 1 &= 2x^2 + 8x + 8 + 2y^2 - 8y + 8 + 2z^2 - 4z + 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 8y - 6z + 13 &= 0 \end{aligned}$$

L'equazione ottenuta è quella di una sfera e si può scrivere evidenziandone le coordinate del centro:

$$(x + 6)^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = -13 + 36 + 16 + 9 \quad (x + 6)^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = (4\sqrt{3})^2$$

La superficie sferica ha centro $C(-6, 4, 3)$ e raggio $r = 4\sqrt{3}$. Verifico che il punto T appartiene alla sfera, sostituendo le sue coordinate nell'equazione della sfera:

$$100 + 64 + 49 - 120 - 64 - 42 + 13 = 0 \quad T \in S$$

Determino le componenti del vettore $\overrightarrow{CT}$, perpendicolare al piano, perciò ho i parametri direttori della direzione normale al piano e posso poi determinare l'equazione del piano α passante per il punto T (il piano tangente a una sfera è sempre perpendicolare al raggio tracciato nel suo punto di tangenza):

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CT}(x_C - x_T; y_C - y_T; z_C - z_T) &= (4; -4; -4) \\ \alpha: 4(x + 10) - 4(y - 8) - 4(z - 7) &= 0 \quad x - y - z + 25 = 0 \end{aligned}$$

7. Determinare le coordinate dei punti nello spazio che giacciono sulla retta perpendicolare nel punto $(1, 1, 1)$ al piano di equazione $2x - y - z = 0$, a distanza 6 da tale piano.

Esame di Stato 2018, sessione straordinaria, quesito 8

I parametri direttori della direzione normale al piano sono: $\vec{v}(2; -1; -1)$. Determino la retta perpendicolare al piano, con il quale condivide i coefficienti direttivi, e passante per il punto $(1, 1, 1)$:

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 1 - k \\ z = 1 - k \end{cases}$$

Il punto da determinare ha coordinate generiche $(1 + 2k, 1 - k, 1 - k)$. Pongo la distanza del generico punto dal punto dato uguale 6:

$$(1 + 2k - 1)^2 + (1 - k - 1)^2 + (1 - k - 1)^2 = 6^2 \quad 4k^2 + k^2 + k^2 = 36 \quad k^2 = 6 \quad k = \pm\sqrt{6}$$

I due punti richiesti hanno coordinate: $P_1(1 + 2\sqrt{6}, 1 - \sqrt{6}, 1 - \sqrt{6})$ e $P_2(1 - 2\sqrt{6}, 1 + \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6})$.

8. Determinare l'equazione della superficie sferica S , con centro sulla retta $r: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ tangente al piano $\pi: 3x - y - 2z + 14 = 0$ nel punto $T(-4, 0, 1)$.

Esame di Stato 2018, sessione ordinaria, quesito 6

Determino innanzi tutto la retta perpendicolare al piano π e passante per T , ottenuta a partire dai parametri direttori della direzione normale al piano $\vec{v}(3; -1; -2)$ e metto a sistema le equazioni parametriche così ottenute con quelle della retta r , per individuare le coordinate del centro della sfera C :

$$\begin{cases} x = -4 + 3k \\ y = -k \\ z = 1 - 2k \end{cases} \quad \begin{cases} t = -k \\ -k = -4 + 3k \\ 1 - 2k = t \end{cases} \quad \begin{cases} t = -k \\ k = 1 \\ 1 - 2 = -1 \end{cases} \quad C(-1, -1, -1)$$

Determino il raggio della sfera, calcolando la distanza tra il centro della sfera e il punto di tangenza T :

$$r = \overline{CT} = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

Ora ho tutti gli elementi per individuare l'equazione della sfera:

$$S: (x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 14 \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z - 11 = 0$$

9. Considerati i punti $A(2, 3, 6)$, $B(6, 2, -3)$, $C(3, -6, 2)$ nello spazio tridimensionale, verificare che i segmenti OA , OB , OC (dove il punto O indica l'origine degli assi) costituiscono tre spigoli di un cubo. Determinare il centro e il raggio della sfera $\mathcal{S}$ circoscritta a tale cubo.

Esame di Stato 2019, sessione suppletiva, quesito 4

Verifico innanzi tutto che $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC}$, trattandosi degli spigoli di un cubo:

$$\overline{OA} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7 \quad \overline{OB} = \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = 7 \quad \overline{OC} = \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = 7$$

Verifico che i tre spigoli siano a due a due perpendicolari:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= (2, 3, 6) & \overrightarrow{OB} &= (6, 2, -3) & \overrightarrow{OC} &= (3, -6, 2) \\ \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} &\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0: 2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot (-3) = 0 & \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC} &\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0: 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-6) + 6 \cdot 2 = 0 & \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OB} &\Leftrightarrow \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = 0: 3 \cdot 6 - 6 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 0 & \overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

Ho verificato che si tratta di un cubo.

Per determinare il centro della sfera circoscritta, determino il centro M della faccia $OADC$ (punto di incontro delle diagonali OD e AC , quindi punto medio della diagonale AC , visto che, in un quadrato, le diagonali si tagliano scambievolmente a metà), poi determino il vertice D .

$$M = \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}, \frac{z_A + z_C}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, 4 \right)$$

$$D: \begin{cases} x_M = \frac{x_O + x_D}{2} \\ y_M = \frac{y_O + y_D}{2} \\ z_M = \frac{z_O + z_D}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_D = 2x_M - x_O = 8 \\ y_D = 2y_M - y_O = -3 \\ z_D = 2z_M - z_O = 5 \end{cases} \quad D(8; -3; 5)$$

Ora posso determinare il centro della sfera circoscritta, determinando il punto medio della diagonale del cubo BD :

$$C = \left(\frac{x_B + x_D}{2}, \frac{y_B + y_D}{2}, \frac{z_B + z_D}{2} \right) = \left(\frac{11}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

Per determinare il raggio della sfera circoscritta, determino la distanza del centro da uno qualsiasi dei vertici noti del cubo (il più comodo è l'origine):

$$\overline{CO} = \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{121 + 1 + 25} = \frac{7}{2}\sqrt{3}$$