

Calcola le seguenti espressioni:

$$1. \frac{\sin \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3} \cos \frac{5}{6}\pi + \sqrt{3} \cos \left(-\frac{7}{6}\pi\right)}{\tan^2 \frac{7}{6}\pi} = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) : \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

$$2. \frac{\tan \frac{7}{4}\pi - \cos \frac{7}{4}\pi}{\tan \frac{\pi}{3} + \cot \frac{\pi}{3}} \cdot \frac{\cot \frac{\pi}{6} + \tan \frac{7}{6}\pi}{\sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}} \cdot \frac{\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}}{-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

Sfruttando le relazioni tra gli archi associati, semplifica le seguenti espressioni, esprimendo il risultato per mezzo delle funzioni goniometriche dell'arco di misura α .

$$3. \frac{-\sin(\pi + \alpha) - \frac{\sin^2(\pi - \alpha)}{\sin \alpha + \cos(\pi + \alpha)}}{\sin(\pi - \alpha)} + \cot(\pi + \alpha) \frac{\cos \alpha}{\sin(\pi - \alpha) + \cos(\pi + \alpha)}$$

$$= \frac{-(-\sin \alpha) - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}}{\sin \alpha} + \cot \alpha \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha (\sin \alpha - \cos \alpha - \sin \alpha)}{\sin \alpha (\sin \alpha - \cos \alpha)} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha (\sin \alpha - \cos \alpha)} =$$

$$= \frac{-\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha (\sin \alpha - \cos \alpha)} = \frac{-\cos \alpha (\sin \alpha - \cos \alpha)}{\sin \alpha (\sin \alpha - \cos \alpha)} = -\cot \alpha$$

$$4. \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos \left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)}{\cos(\alpha - 3\pi) + \sin(\alpha - \pi)} \cdot \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi - \alpha)}{\cos(2\pi - \alpha) + \sin(-\alpha)}$$

$$= \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{-\cos \alpha - \sin \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{-(\cos \alpha + \sin \alpha)} \cdot \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = -1$$

Verifica le seguenti identità, supponendo che le variabili assumano valori per cui tutte le espressioni sono definite.

$$5. (\cot \alpha - \cos \alpha) \cdot \tan \alpha = 1 - \frac{1}{\csc \alpha}$$

$$1 - \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1 - \sin \alpha \quad 1 - \sin \alpha = 1 - \sin \alpha$$

$$6. \frac{\sec \alpha + \csc \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha} = \cos \alpha + \sin \alpha$$

$$\frac{\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \cos \alpha + \sin \alpha \quad \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \cos \alpha + \sin \alpha \quad \sin \alpha + \cos \alpha = \cos \alpha + \sin \alpha$$

$$7. \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \cot^2 \alpha \sin^4 \alpha$$

$$(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \sin^4 \alpha \quad 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$8. \quad \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2} + 2 \tan \alpha \cos^2 \alpha - (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{\tan \alpha}{2} (1 - \sin^2 \alpha) - 1$$

$$\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2} + 2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos^2 \alpha - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha) = \frac{\sin \alpha}{2 \cos \alpha} \cdot \cos^2 \alpha - 1$$

$$\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2} + 2 \sin \alpha \cos \alpha - 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2} - 1 \quad -1 = -1$$

9. Trova quale condizione deve soddisfare il parametro k affinché sia verificata l'uguaglianza:

$$\tan \alpha = \frac{2-k}{k^2+4} \quad \alpha \in \text{quarto quadrante}$$

Nel quarto quadrante $\tan \alpha < 0$: $\frac{2-k}{k^2+4} < 0 \quad 2-k < 0 \quad k > 2$

10. Trova per quali valori di a le soluzioni dell'equazione $x^2 - x - a^2 + 5a - 6 = 0$ rappresentano il seno e il coseno dello stesso angolo.

Risolve l'equazione di secondo grado: $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a^2 - 20a + 24}}{2} = \frac{1 \pm (2a-5)}{2} = \begin{cases} a-2 \\ 3-a \end{cases}$

Trattandosi di seno e coseno dello stesso angolo, vale la prima relazione fondamentale: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

$$(a-2)^2 + (3-a)^2 = 1 \quad a^2 - 4a + 4 + 9 - 6a + a^2 = 1 \quad a^2 - 5a + 6 = 0 \quad a = 2 \vee a = 3$$

OPPURE:

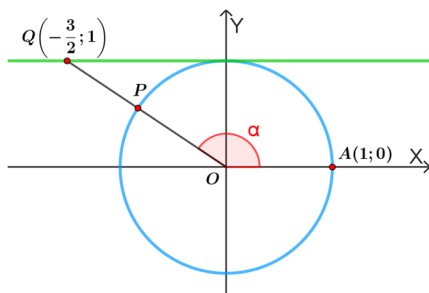
Le soluzioni dell'equazione rappresentano seno e coseno dello stesso angolo, perciò vale la prima relazione fondamentale:

$$x_1 = \cos \alpha \quad e \quad x_2 = \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 = 1 \quad (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1$$

Dalle relazioni tra i coefficienti e le soluzioni di un'equazione di secondo grado ($x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$), posso scrivere:

$$1 - 2(-a^2 + 5a - 6) = 1 \quad a^2 - 5a + 6 = 0 \quad a = 2 \vee a = 3$$

11. Sia α è l'angolo indicato in figura. Calcola: $3\sqrt{13} (\sin \alpha + \sec \alpha)$.



Trovandosi su una circonferenza goniometrica: $P(\cos \alpha; \sin \alpha)$.

Determino le coordinate di P, facendo l'intersezione tra la retta PQ e la circonferenza:

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad x^2 + \frac{4}{9}x^2 = 1 \quad \frac{13}{9}x^2 = 1 \quad \begin{cases} x = -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ y = \frac{2}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

$$3\sqrt{13} \left(y_P + \frac{1}{x_P} \right) = 3\sqrt{13} \left(\frac{2}{\sqrt{13}} - \frac{\sqrt{13}}{3} \right) = 6 - 13 = -7$$

OPPURE:

Il coefficiente angolare della retta OQ è la tangente dell'angolo α . Determino la tangente e le altre funzioni, a partire dalla seconda relazione fondamentale e dalla prima:

$$\tan \alpha = m_{OQ} = \frac{Y_Q - Y_O}{X_Q - X_O} = -\frac{2}{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \tan^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha (\tan^2 \alpha + 1) = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1}$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 1}} = -\frac{3}{\sqrt{13}} \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = -\frac{\sqrt{13}}{3} \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$3\sqrt{13} \left(\frac{2}{\sqrt{13}} - \frac{\sqrt{13}}{3} \right) = 6 - 13 = -7$$