1. Nel piano cartesiano sono poste due cariche puntiformi: la carica A, di intensità $5{,}0\ \mu C$, si trova nel punto $A(10;8)$, mentre la carica B, ignota, si trova nel punto $B(6;-3)$. È dato inoltre il punto $C(-2;3)$. Tutte le coordinate sono espresse in metri. Determina quale deve essere l'intensità della carica B affinché il campo elettrico risultante nel punto C:
   A. abbia direzione parallela e verso opposto all'asse x;
   B. abbia la stessa direzione e verso opposto all'asse y.

Determino, innanzi tutto, le funzioni goniometriche degli angoli α e β. Per l'angolo α applico i teoremi dei triangoli rettangoli al triangolo ACH, potendo ricavare velocemente le misure dei cateti e dell'ipotenusa:

$$\overline{AH} = |y_A - y_C| = 5\ m \quad \overline{HC} = |x_A - x_C| = 12\ m$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = 13\ m$$

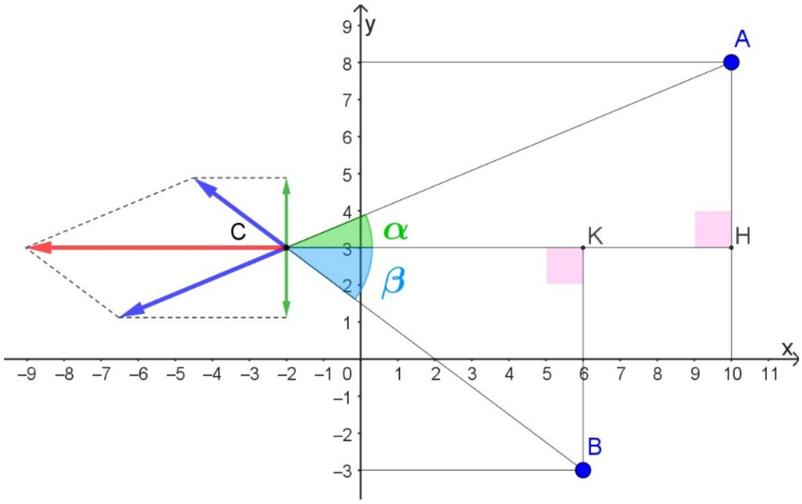
$$\cos\alpha = \frac{\overline{CH}}{\overline{AC}} = \frac{12}{13} \qquad \sin\alpha = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{5}{13}$$

Per l'angolo β, considero il triangolo BKC:

$$\overline{BK} = |y_B - y_C| = 6\ m \quad \overline{KC} = |x_B - x_C| = 8\ m$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = 10\ m$$

$$\cos\beta = \frac{\overline{KC}}{\overline{BC}} = \frac{4}{5} \qquad \sin\beta = \frac{\overline{BK}}{\overline{BC}} = \frac{3}{5}$$



A. Perché il campo elettrico risultante in C abbia direzione parallela e verso e opposto all'asse x, è necessario che la carica in B sia **positiva**. Perché la risultante sia quella indicata:

$$E_{A_y} = E_{B_y}$$

Esplicitando le due componenti, in funzione delle cariche in A e in B:

$$E_A \sin\alpha = E_B \sin\beta \quad \Rightarrow \quad k\frac{|q_A|}{\overline{AC}^2}\sin\alpha = k\frac{|q_B|}{\overline{BC}^2}\sin\beta$$

Posso determinare la carica richiesta esplicitandola:

$$q_B = |q_A| \cdot \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \mathbf{1{,}9\ \mu C}$$

B. Analogamente a quanto fatto prima, perché il campo elettrico risultante in C abbia direzione parallela e verso opposto all'asse y, è necessario che la carica in B sia **negativa**. Perché la risultante sia quella indicata:

$$E_{A_x} = E_{B_x}$$

Esplicitando le due componenti, in funzione delle cariche in A e in B:

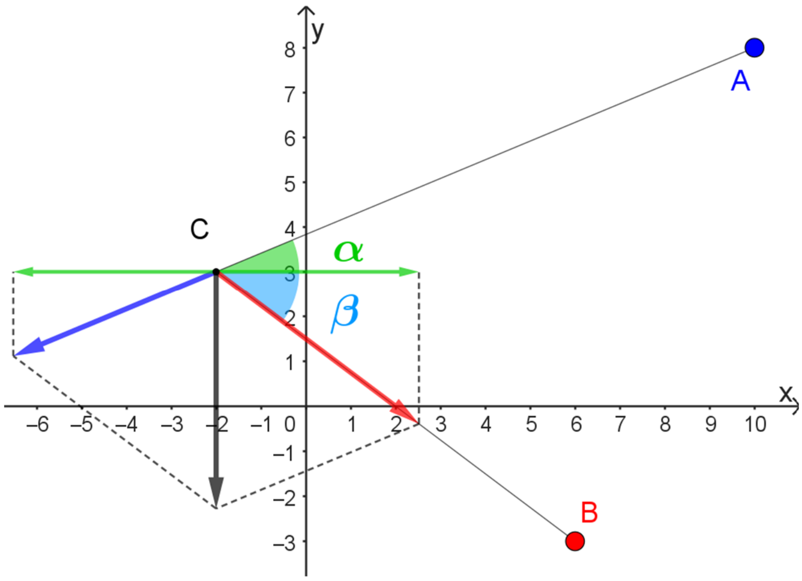
$$E_A \cos\alpha = E_B \cos\beta$$

Perciò:

$$k\frac{|q_A|}{\overline{AC}^2}\cos\alpha = k\frac{|q_B|}{\overline{BC}^2}\cos\beta$$

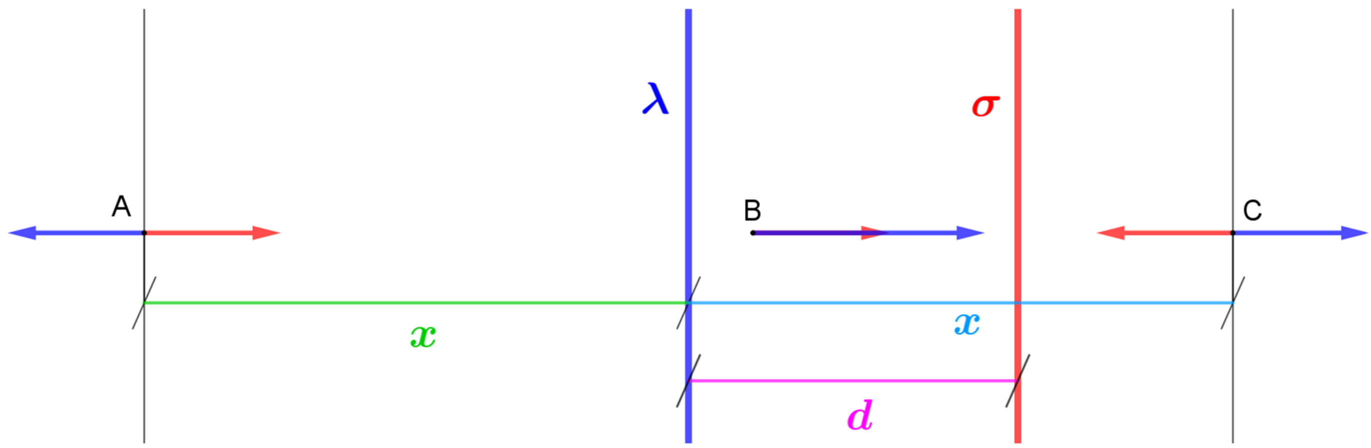
Ed esplicitando la carica:

$$q_B = -|q_A| \cdot \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \mathbf{-3{,}4\ \mu C}$$

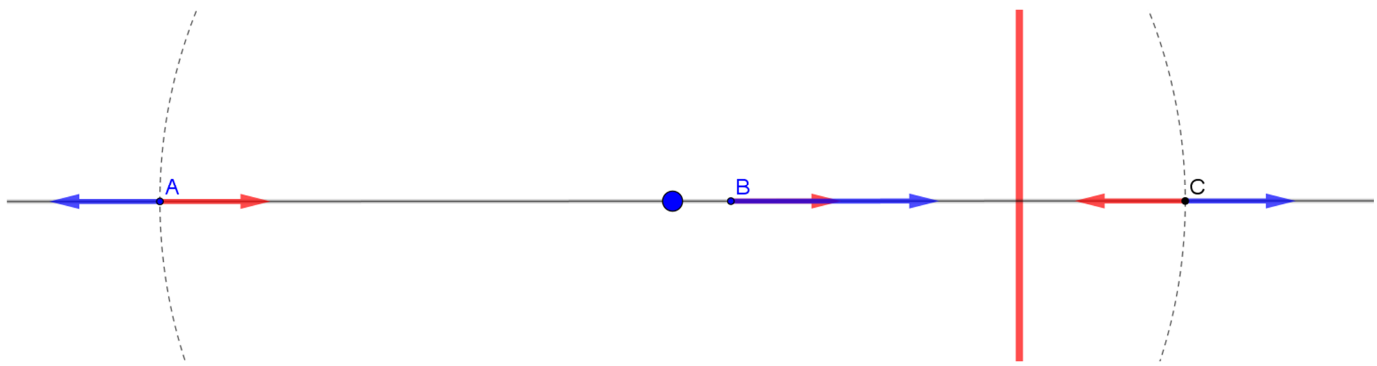


2. Un filo rettilineo infinitamente lungo, con densità lineare di carica $\lambda = +8{,}5\ C/m$, si trova a una distanza di $42\ cm$ da un piano infinito uniformemente carico, avente densità superficiale di carica $\sigma = -4{,}2\ C/m^2$. Determina se esistono punti dello spazio nei quali il campo elettrico risultante sia nullo. In caso affermativo, individua la loro posizione rispetto al filo e al piano.

$$\lambda = +8{,}5\ C/m \qquad d = 42\ cm \qquad \sigma = -4{,}2\ C/m^2 \qquad \vec{E}_\lambda + \vec{E}_\sigma = 0 \qquad x?$$



Ho rappresentato la situazione in due diversi modi: sopra vedo a sinistra, in blu, il filo, a destra, in rosso, il piano.
Sotto, vedo il filo da sopra (il punto blu al centro del disegno) e il piano, in rosso, rappresentato ancora come una retta.



Le tre diverse posizioni (A, B e C) offrono una soluzione qualitativa del problema.
Il punto A e il punto C sono equidistanti dal filo (nel disegno in basso si vede che sono su una stessa circonferenza con centro nel filo) e, quindi, hanno lo stesso campo elettrico generato dal filo, visto che il modulo del campo elettrico del filo è inversamente proporzionale alla distanza dallo stesso. Il campo elettrico del piano, invece, è uniforme (indicato con le frecce rosse). Solo nel punto A e nel punto C è possibile ottenere un campo elettrico nullo, visto che i due campi hanno verso opposto. Nel punto B, invece, non è possibile ottenere un campo elettrico nullo, visto che i due campi hanno lo stesso verso. I punti A e C, come mostrato nel primo disegno, non rappresentano singoli punti: si tratta di rette parallele al filo. Passo a determinare la loro distanza dal filo.

Il campo elettrico generato dal filo ha modulo: $E_\lambda = \dfrac{|\lambda|}{2\pi\varepsilon_o x}$

Il campo elettrico generato dal piano ha modulo: $E_\sigma = \dfrac{|\sigma|}{2\varepsilon_o}$

Pongo i due moduli uguali per determinare la distanza dal filo: $\dfrac{|\lambda|}{2\pi\varepsilon_o x} = \dfrac{|\sigma|}{2\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{|\lambda|}{\pi|\sigma|} = \mathbf{0,64\ m}$

Il campo elettrico è nullo sulla retta parallela al filo, a distanza di 64 cm dallo stesso, ovvero a una distanza, da un lato, di $\mathbf{1,06\ m}$ dal piano e, dall'altro lato, a una distanza di $\mathbf{0,22\ m}$.

3. Nel vuoto sono poste due cariche puntiformi lungo un asse cartesiano x: la carica $-q$ si trova nell'origine e la carica $+3q$ si trova a $32\ cm$ dall'origine nel verso positivo dell'asse. Determina le posizioni dell'asse in cui il potenziale elettrico totale è nullo.

Indicata con x l'ascissa del punto in cui il potenziale elettrico totale è nullo, d l'ascissa del punto in cui si trova la carica $+3q$ e con 0 l'ascissa del punto in cui si trova la carica $-q$, pongo la somma dei potenziali uguale a 0:

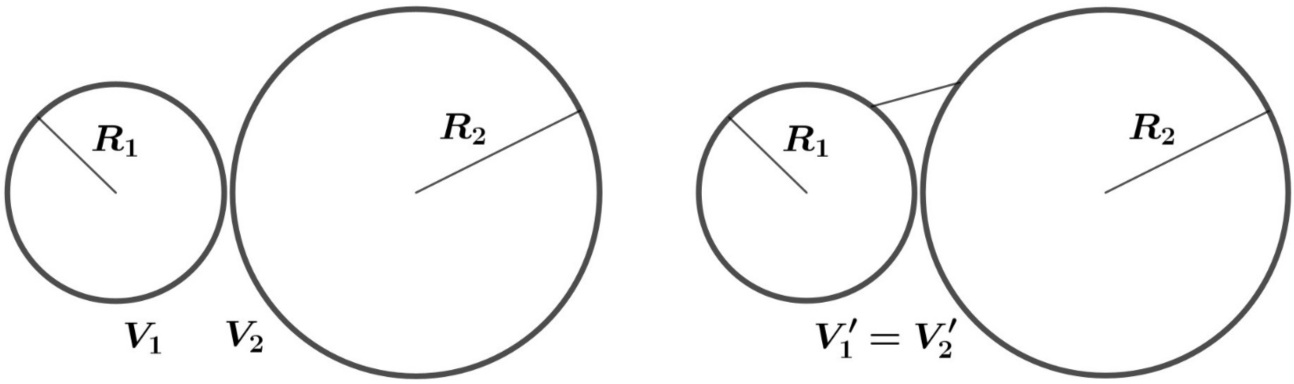
$$k\frac{-q}{|x|}+k\frac{3q}{|x-d|}=0 \qquad 3\,|x|=|x-d|$$

Da questa equazione ottengo due equazioni e, quindi, due diverse posizioni possibili:

$$3x=x-d \quad \Rightarrow \quad 2x=-d \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{d}{2}=\boldsymbol{-16\ cm} \qquad\qquad 3x=-x+d \quad \Rightarrow \quad 4x=d \quad \Rightarrow \quad x=\frac{d}{4}=\boldsymbol{8,0\ cm}$$

4. Due sfere conduttrici, molto lontane tra loro, hanno raggi rispettivamente di $6{,}5\ cm$ e $11\ cm$ e si trovano ai potenziali di $1200\ V$ e $3500\ V$. Le due sfere vengono collegate mediante un sottile filo conduttore e successivamente scollegate. Determina il potenziale finale di ciascuna sfera dopo il collegamento.

$$R_1=6{,}5\ cm \qquad R_2=11\ cm \qquad V_1=1200\ V \qquad V_2=3500\ V \qquad V_1'? \qquad V_2'?$$



Nel momento in cui le due sfere vengono collegate, diventano un'unica superficie equipotenziale, quindi $V_1'=V_2'=V'$, con la carica che si ridistribuisce. Determino le due cariche iniziali in funzione del potenziale e del raggio della sfera:

$$V_1=k\frac{Q_1}{R_1} \quad \Rightarrow \quad Q_1=\frac{V_1R_1}{k} \qquad\qquad V_2=k\frac{Q_2}{R_2} \quad \Rightarrow \quad Q_2=\frac{V_2R_2}{k}$$

Analogamente per le cariche finali: $$V'=k\frac{Q_1'}{R_1} \quad \Rightarrow \quad Q_1'=\frac{V'R_1}{k} \qquad\qquad V'=k\frac{Q_2'}{R_2} \quad \Rightarrow \quad Q_2'=\frac{V'R_2}{k}$$

Per il principio di conservazione della carica: $$Q_1+Q_2=Q_1'+Q_2'$$

Sostituendo le cariche nell'equazione precedente, ottengo: $$\frac{V_1R_1}{k}+\frac{V_2R_2}{k}=\frac{V'R_1}{k}+\frac{V'R_2}{k}$$

Semplificando k e raccogliendo V', posso esplicitarlo e ottenerne l'intensità: $$V'=\frac{V_1R_1+V_2R_2}{R_1+R_2}=\boldsymbol{2600\ V}$$