1. Angela, Beatrice, Carlo, Diego, Elena e Fabrizio siedono a un tavolo circolare di un ristorante per la cena. Calcola il numero dei modi distinti in cui i sei amici possono sedersi al tavolo se:
   A. si siedono casualmente;
   B. Beatrice e Diego vogliono stare vicini;
   C. Beatrice e Diego non vogliono stare vicini.

A. Fisso la posizione di Angela, in modo che restino altri 5 posti da assegnare: per il primo posto posso scegliere tra 5 persone, per il secondo posto tra 4, per il terzo tra 3 e così via, perciò il numero di modi distinti è dato da: $5! = \mathbf{120}$.

B. Supponendo che Beatrice e Diego siano seduti vicini, possono sedersi in due modi diversi: Beatrice ha Diego alla sua sinistra, oppure Beatrice ha Diego alla sua destra. In ogni caso, gli altri hanno $4!$ modi diversi di sedersi, perciò in totale: $2 \cdot 4! = \mathbf{48}$.

C. Considerato che ci sono 120 configurazioni possibili (punto A) e che in 48 Beatrice e Diego sono seduti vicini (punto B), i modi in cui i sei amici possono sedersi al tavolo senza che Beatrice e Diego siano vicini sono: $120 - 48 = \mathbf{72}$.

2. Lanciamo contemporaneamente 5 dadi. Quante possibili combinazioni di numeri si possono ottenere? E quante contengono il numero 1 almeno una volta?

Si tratta di una combinazione con ripetizione.
Il numero di elementi distinti è dato da 6, le facce dei dadi, mentre il numero di elementi di ciascuna combinazione è 5, visto che 5 sono i dadi utilizzati. Perciò, usando il coefficiente binomiale:

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{6+5-1}{5} = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\,5!} = \mathbf{252}$$

Considero le combinazioni che non contengono il numero 1: in tal caso il numero di elementi distinti, ovvero le facce del dado da considerare, sono solo 5, mentre il numero di elementi resta 5 (il numero di dadi non cambia), perciò:

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{5+5-1}{5} = \binom{9}{5} = \frac{9!}{5!\,4!} = 126$$

Sottraggo il numero di combinazioni che non contengono il numero 1 dalle combinazioni totali e ottengo $\mathbf{126}$.

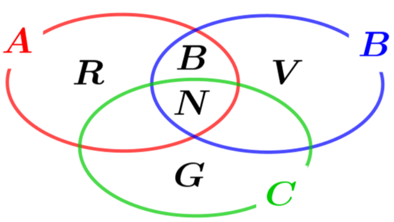
3. Da un mazzo di 52 carte si estraggono consecutivamente due carte senza rimettere la carta estratta nel mazzo. Calcola la probabilità che esse siano di cuori, sapendo che sono entrambe rosse.

So che le carte sono entrambe rosse e, in un mazzo di 52 carte, le carte rosse sono la metà. Le carte di cuori sono, invece, 13, perciò, per la prima carta ho 13 casi favorevoli su 26 possibili e per la seconda 12 casi favorevoli su 25 possibili:

$$p = \frac{13}{26} \cdot \frac{12}{25} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{25}} = \mathbf{24\%}$$

4. In un'urna abbiamo delle palline, ciascuna con un colore diverso e con probabilità di estrazione diversa. L'insieme dei possibili esiti è $U = \{rossa, gialla, nera, verde, bianca\}$ e le probabilità di estrazione sono $1/7$ per ciascuna delle palline rossa, gialla e nera e $2/7$ per ciascuna delle palline verde e bianca.
Dati gli eventi $A = \{rossa, nera, bianca\}$, $B = \{nera, verde, bianca\}$ e $C = \{gialla, nera\}$, calcola le seguenti probabilità:

$$p(A|B) \qquad p(B|C) \qquad p(C|\bar{A}) \qquad p(\bar{A}|C)$$



Rappresento graficamente la situazione, ricavando dai dati:

$$p(R) = \frac{1}{7} \qquad p(G) = \frac{1}{7} \qquad p(N) = \frac{1}{7} \qquad p(V) = \frac{2}{7} \qquad p(B) = \frac{2}{7}$$

Dal grafico ricavo che la probabilità che si verifichi l'evento A, sapendo che si è verificato l'evento B corrisponde alla probabilità dell'estrazione di una pallina bianca o nera all'interno dell'evento B:

$$p(A|B) = \frac{p(B) + p(N)}{p(B) + p(N) + p(V)} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$$

Dal grafico ricavo che la probabilità che si verifichi l'evento B, sapendo che si è verificato l'evento C corrisponde alla probabilità dell'estrazione di una pallina nera all'interno dell'evento C:

$$p(B|C)=\frac{p(N)}{p(N)+p(G)}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

Dal grafico ricavo che la probabilità che si verifichi l'evento C, sapendo che A non si è verificato: corrisponde alla probabilità dell'estrazione di una pallina gialla all'interno dell'evento estrazione di una pallina verde o gialla:

$$p(C|\bar{A})=\frac{p(G)}{p(V)+p(G)}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

Dal grafico ricavo la probabilità che non si verifichi A (e quindi venga estratta una pallina verde o gialla), sapendo che si è verificato C: corrisponde alla probabilità dell'estrazione di una pallina gialla all'interno dell'evento estrazione di una pallina nera o gialla:

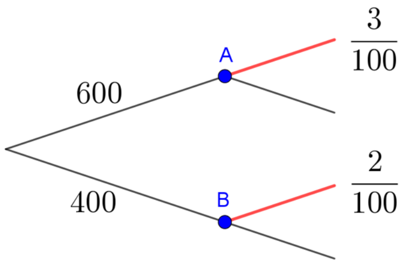
$$p(\bar{A}|C)=\frac{p(G)}{p(N)+p(G)}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

5. Un'azienda produce, in due capannoni vicini, scatole di imballaggio. Nel primo capannone si producono 600 scatole al giorno di cui il 3% difettose, mentre nel secondo capannone se ne producono 400 col 2% di pezzi difettosi. La produzione viene immagazzinata in un unico capannone dove, nel corso di un controllo casuale sulla produzione di una giornata, si trova una scatola difettosa. Qual è la probabilità che provenga dal secondo capannone?

Esame di Stato 2016 – Sessione straordinaria – Quesito 5

Si tratta di un'applicazione del teorema di Bayes:

$$\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{100}}{\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{100}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{100}}=\frac{4}{13}=\mathbf{30{,}8\%}$$



6. Un'urna contiene 10 palline numerate da 1 a 10. Si estraggono contemporaneamente 5 palline. Calcola la probabilità che:
   A. due palline abbiano un numero maggiore di 6;
   B. le cinque palline abbiano tutte un numero maggiore di 4;
   C. quattro palline abbiano un numero minore di 5.

A. La cinquina è costituita da 2 palline scelte tra le 4 maggiori di 6 e 3 palline scelte tra le 6 rimanenti. Il numero totale di cinquine è dato dalla scelta di 5 palline tra le 10 disponibili:

$$p=\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{3}}{\binom{10}{5}}=\mathbf{\frac{10}{21}}=\mathbf{47{,}6\%}$$

B. In questo caso, le cinque palline saranno scelte tra quelle con numero maggiore di 4, perciò ho una scelta tra 6 casi possibili:

$$p=\frac{\binom{6}{5}}{\binom{10}{5}}=\mathbf{\frac{1}{42}}=\mathbf{2{,}38\%}$$

C. La cinquina è costituita da 4 palline scelte tra le 4 minori di 5 e 1 pallina scelta tra le 6 rimanenti. Il numero totale di cinquine è dato dalla scelta di 5 palline tra le 10 disponibili:

$$p=\frac{\binom{4}{4}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{10}{5}}=\mathbf{\frac{1}{42}}=\mathbf{2{,}38\%}$$

7. Una classe è formata da 28 alunni, di cui 16 femmine e 12 maschi. Tra le femmine ci sono due "Maria" e fra i maschi un solo "Antonio". Si deve formare una delegazione formata da due femmine e due maschi. Quanto vale la probabilità che la delegazione comprenda "Antonio" e almeno una "Maria"?

Esame di Stato 2006, PNI – Sessione straordinaria – Quesito 10

Il numero di coppie di ragazze possibili è $\binom{16}{2}=120$, mentre il numero di coppie senza le due ragazze di nome Maria è $\binom{14}{2}=91$. Perciò il numero di coppie di ragazze che hanno almeno una ragazza di nome Maria è: $120-91=29$.

Il numero di coppie di ragazzi possibili è $\binom{12}{2}=66$, mentre il numero di coppie senza Antonio è $\binom{11}{2}=55$. Perciò il numero di coppie di ragazzi che hanno un ragazzo di nome Antonio è: $66-55=11$.

Perciò, calcolando il numero di delegazioni possibili, dato dal prodotto tra il numero totale di coppie di ragazze e il numero totale di coppie di ragazzi, ottengo:

$$p=\frac{29\cdot 11}{120\cdot 66}=\mathbf{\frac{29}{720}}=\mathbf{4{,}03\%}$$

8. Lanciando una moneta sei volte qual è la probabilità che si ottenga testa "al più" due volte? Qual è la probabilità che si ottenga testa "almeno" due volte?

Esame di Stato 2019 – Sessione straordinaria – Quesito 5

Chiedere la probabilità di ottenere testa al massimo due volte, equivale a calcolare la probabilità di non ottenere mai testa, di ottenere una sola volta testa o di ottenerla due volte. Si tratta di un'applicazione del teorema delle prove ripetute:

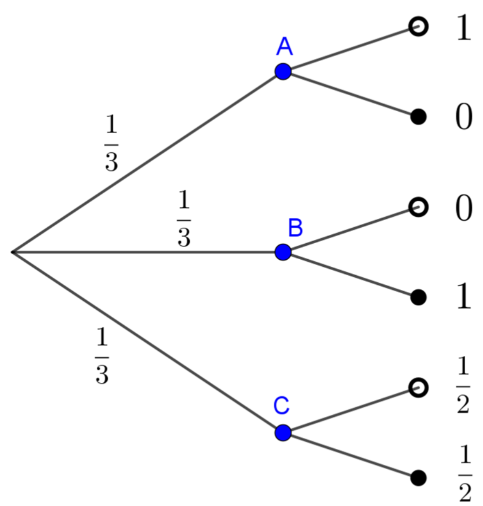
$$p(x \leq 2) = \binom{6}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \binom{6}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 22\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{11}{32} = \mathbf{34,4\%}$$

Chiedere la probabilità di ottenere testa almeno due volte, equivale a calcolare la probabilità contraria a quella di non ottenere mai testa o di ottenerla una sola volta. È ancora un'applicazione del teorema delle prove ripetute:

$$p(x \geq 2) = 1 - \binom{6}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6 - \binom{6}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1 - 7\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{57}{64} = \mathbf{89,1\%}$$

9. In un'urna ci sono due palline bianche, in una seconda urna ci sono due palline nere e in una terza urna ci sono una pallina bianca e una pallina nera. Scegli a caso un'urna ed estrai, sempre a caso, una delle due palline in essa contenute: è bianca. Saresti disposto a scommettere alla pari che la pallina rimasta nell'urna che hai scelto sia essa pure bianca?

Esame di Stato 2005, PNI – Sessione suppletiva – Quesito 8



Indico le urne come A, prima urna con due palline bianche, B, seconda urna con due palline nere, e C, terza urna con una pallina bianca e una nera.
Si tratta di un'applicazione del teorema di Bayes, calcolando la probabilità di aver estratto una pallina bianca dall'urna A:

$$\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} = \mathbf{66,7\%}$$

Stando così le cose, è conveniente scommettere alla pari, perché ho più probabilità di vincere che di perdere.