1. Assegnate le rette $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$, $s: \begin{cases} x = 1 \\ 2y - z = 3 \end{cases}$ con t parametro reale, determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente r e parallelo a s.

Esame di Stato 2023, sessione straordinaria, quesito 3

Individuo i vettori delle rette date: $\vec{v}_r(1,1,4)$, dopo aver scritto la retta s in forma parametrica: $s: \begin{cases} x = 1 \\ y = k \\ z = -3 + 2k \end{cases}$ $\vec{v}_s(0,1,2)$

Perché il piano contenga la retta r deve essere tale per cui il vettore normale $\vec{n}\ (a,b,c)$ al piano sia perpendicolare a r, ovvero tale per cui: $\vec{v}_r \perp \vec{n} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad a + b + 4c = 0$

Inoltre, un generico punto della retta, ad esempio $(1,0,1)$ apparterrà anche al piano, di generica equazione: $ax + by + cz + d = 0$. Basta, quindi, sostituire le coordinate del punto nella generica equazione del piano: $a + c + d = 0$

Infine, c'è la condizione data dalla retta s: $\vec{v}_s \perp \vec{n} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_s \cdot \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad b + 2c = 0$

Metto a sistema le tre condizioni e risolvo:

$$\begin{cases} a + b + 4c = 0 \\ a + c + d = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -2c \\ a = -2c \\ d = c \end{cases} \qquad -2cx - 2cy + cz + c = 0 \qquad \mathbf{2x + 2y - z - 1 = 0}$$

2. Verificare che i punti $O(0;0;0)$, $A(1;4;8)$, $B(-6;0;12)$ e $C(-7;\ -4;4)$ sono complanari. Calcolare area e perimetro del quadrilatero OABC e classificarlo.

Esame di Stato 2024, sessione suppletiva, quesito 4

Determino l'equazione del piano passante per O, A e B e verifico che C vi appartiene. Per determinare il piano, sostituisco le coordinate dei tre punti nella sua equazione generica: $ax + by + cz + d = 0$

$$\begin{cases} d = 0 \\ a + 4b + 8c + d = 0 \\ -6a + 12c + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} d = 0 \\ a = 2c \\ b = -\dfrac{5}{2}c \end{cases}$$

L'equazione del piano è: $4x - 5y + 2z = 0$

Sostituisco le coordinate di C verificando che appartiene al piano: $4\,(-7) - 5\,(-4) + 8 = -28 + 20 + 8 = 0$

Ipotizzando che sia un parallelogramma, basta verificare che le diagonali OB e AC si taglino scambievolmente a metà, ovvero che hanno il punto medio in comune: $M_{OB}(-3,0,6) \equiv M_{AC}(-3,0,6)$

Si tratta di un $\boldsymbol{parallelogramma}$. Determino la misura di due lati consecutivi:

$$\overline{BC} = \overline{OA} = \sqrt{1 + 4^2 + 8^2} = 9 \qquad \overline{CO} = \overline{AB} = \sqrt{7^2 + 4^2 + 4^2} = 9$$

Dato che i lati sono congruenti, potrebbe essere un quadrato o un rombo. Determino la misura delle diagonali: $\overline{OB} = \sqrt{6^2 + 12^2} = 6\sqrt{5}$ $\quad \overline{AC} = \sqrt{8^2 + 8^2 + 4^2} = 12$

Avendo diagonali diverse, si tratta di un $\boldsymbol{rombo}$. Ne determino perimetro e area: $2p = 4\,\overline{AB} = \mathbf{36}$ $\quad \mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\overline{OB} \cdot \overline{AC} = \mathbf{36\sqrt{5}}$

3. Trova l'equazione del piano π rispetto a cui i punti $A(3;\ -3;4)$ e $B(-2;4;1)$ sono simmetrici.

Determino le componenti del vettore $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (x_A - x_B; y_A - y_B; z_A - z_B) = (5;\ -7;3)$

Determino le coordinate del punto medio M del segmento AB, appartenente al piano π: $M = \left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{2}\right)$

Il vettore $\overrightarrow{AB}$ è perpendicolare al piano da determinare, perciò è il suo vettore normale, inoltre il piano passa per il punto M, perciò posso determinarne l'equazione:

$$5\left(x - \frac{1}{2}\right) - 7\left(y - \frac{1}{2}\right) + 3\left(z - \frac{5}{2}\right) = 0$$

$$\mathbf{10x - 14y + 6z - 13 = 0}$$

4. Mostrare che, nello spazio tridimensionale, il piano di equazione $x + 2y - 3z - 7 = 0$ è tangente alla superficie sferica S di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 8 = 0$ e stabilire le coordinate del punto di tangenza T. Scrivere, inoltre, l'equazione di una retta che sia tangente alla superficie S nel punto T.

Esame di Stato 2025, sessione straordinaria, quesito 4

Riscrivo l'equazione della sfera in modo da determinarne centro e raggio:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = \left(\sqrt{14}\right)^2$$
$$C(1;\ -1;\ 2) \qquad r = \sqrt{14}$$

Verifico che la distanza del centro della circonferenza dal piano sia uguale al raggio:

$$d = \frac{|ax_C + by_C + cz_C + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|1 - 2 - 6 - 7|}{\sqrt{1 + 2^2 + 3^2}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

Il piano è tangente alla sfera. Scrivo l'equazione della retta s perpendicolare al piano e passante per il centro della sfera. In quanto perpendicolare al piano, sarà parallela al vettore normale $\vec{n}\ (1, 2, -3)$:

$$s: \begin{cases} x = 1 + k \\ y = -1 + 2k \\ z = 2 - 3k \end{cases}$$

Determino le coordinate di T, sostituendo le componenti della retta s nell'equazione del piano:

$$1 + k - 2 + 4k - 6 + 9k - 7 = 0$$

Ottenuto il valore $k = 1$, posso sostituirlo nell'equazione della retta e ottenere le coordinate di T: $\boldsymbol{T(2, 1, -1)}$

Una qualsiasi retta passante per T e appartenente al piano è perpendicolare alla retta s e, quindi, tangente alla sfera. Scelgo un punto qualsiasi A del piano: $A(1, 3, 0)$

Determino l'equazione della retta AT: $\overrightarrow{AT}\ (1, -2, -1)$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 2 + t} \\ \boldsymbol{y = -2 + 3t} \\ \boldsymbol{z = -1} \end{cases}$$