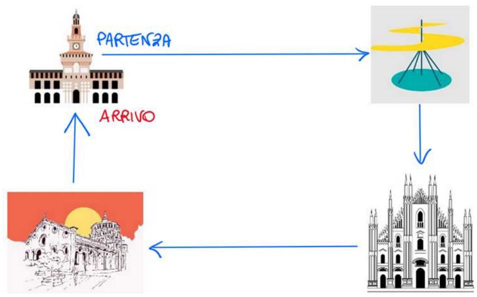
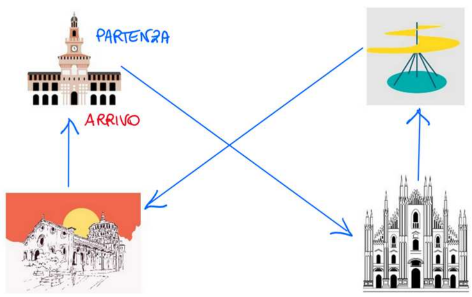
GRAFO-mania

INTRODUZIONE – setting: tutti attorno ad una tavola di legno, sulla quale sono incollati quattro disegni, rappresentanti le tappe della gita.
Abbiamo un piccolo problema: i nostri professori ci hanno chiesto di dar loro una mano a trovare un percorso per la gita a Milano di quest’anno.
Le mete più consigliate dall’agenzia sono il Duomo, la Chiesa di Santa Maria delle Grazie, il Castello Sforzesco ed il Museo della scienza Leonardo da Vinci

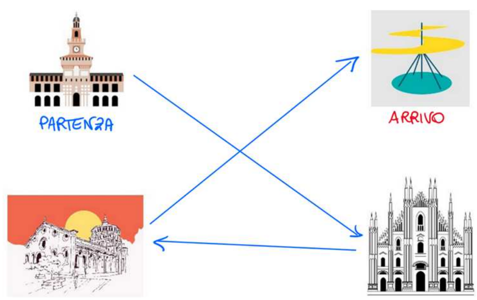
Il primo accordo con l’autista prevede che lui ci porti e venga a prenderci al Castello
Noi avremmo pensato di fare questo percorso (si mostra il perimetro del rettangolo passando attraverso le tappe con un cordoncino)





In un secondo tempo, l’agenzia ha chiamato la scuola, specificando che l’unica fascia oraria disponibile per la visita del Duomo per il giorno in cui andremo a Milano è alle 11, perciò è necessario visitarlo come seconda tappa
Abbiamo proposto al nostro insegnante di cambiare percorso in questo modo (si mostra la “clessidra”)

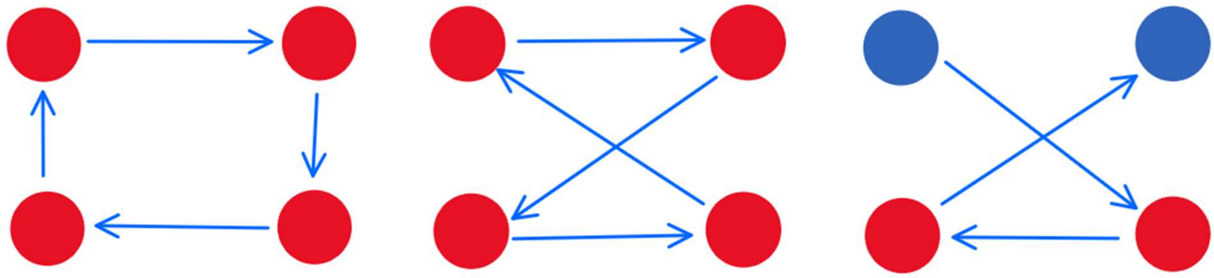
Ma… è subentrato un nuovo problema: dall’agenzia ci hanno informato (e questo è successo proprio la settimana scorsa) che l’autista ci lascerà al Castello, ma tornerà a riprenderci al Museo
Abbiamo, quindi, proposto questo nuovo percorso (Castello – Duomo – Santa Maria – Museo)



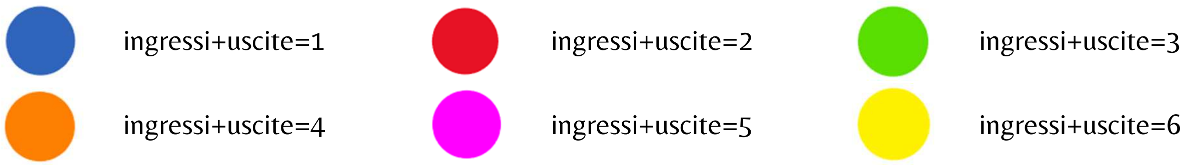
Nella nostra scuola ci sono parecchie classi e per ognuna di esse si organizza un viaggio di istruzione. Non possiamo realizzare per ognuna di esse una tavola come questa, perciò… proviamo a studiare un po’ di percorsi, usando il computer!

Grafi: alla ricerca della regola! – SETTING: PC (2 ragazzi per postazione)

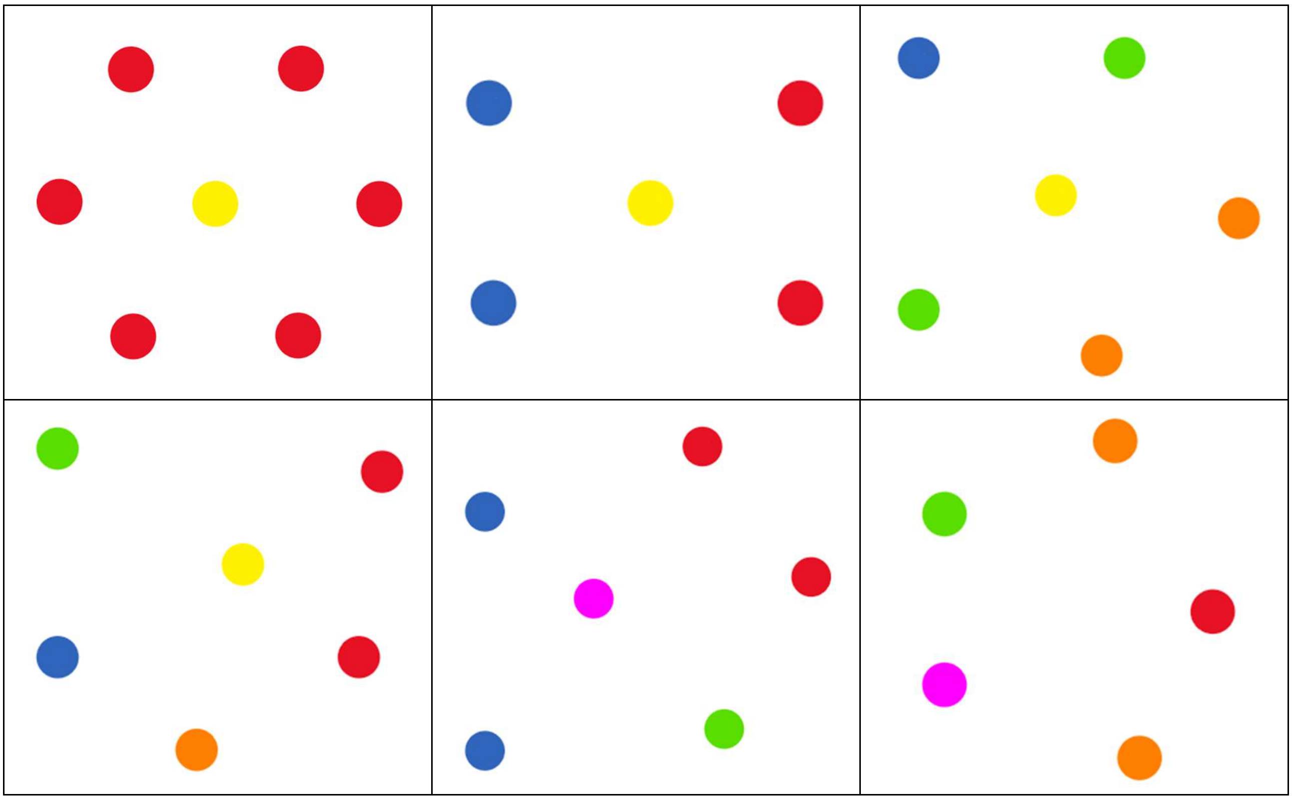
A partire dalle tappe della gita a Milano, si mostrano le tre situazioni schematizzandole con un grafo:



Le tappe sono indicate, nell'ultimo caso, con un colore diverso, perché, se notiamo i particolari delle rappresentazioni, mentre ogni altra tappa ha una freccia in entrata e una in uscita, nell'ultimo caso al Museo e al Castello corrisponde una sola freccia, in uscita in un caso e in entrata nell'altro. Per poter procedere con lo studio dei grafi e per analizzare casi più complessi, abbiamo sei colori:

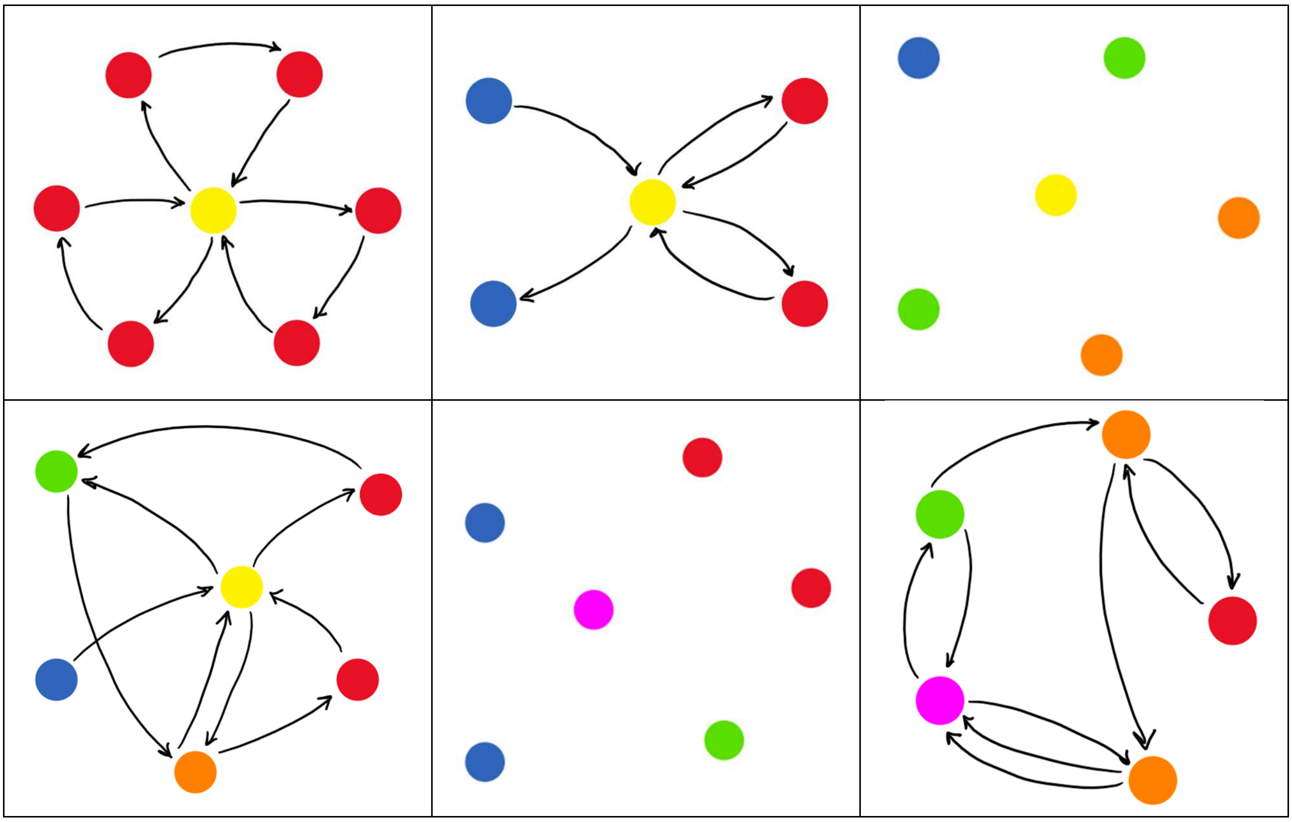


Sullo schermo di ogni pc compaiono sei configurazioni diverse:

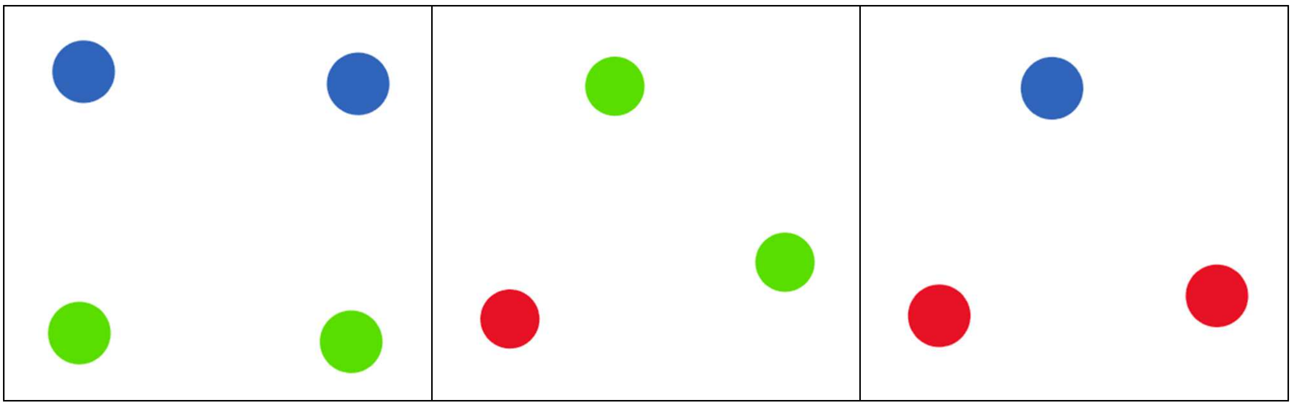


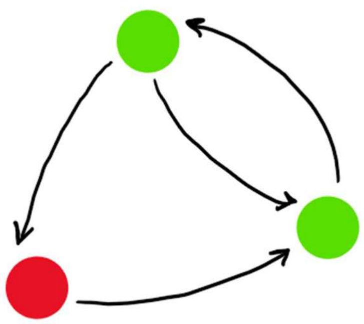
I partecipanti vengono invitati a risolvere le configurazioni proposte. L'obiettivo è quello di unire tutti i punti, rispettando la legenda, facendo in modo di fare il percorso senza interruzioni, ovvero (se i ragazzi stessero usando un foglio al posto del pc) dovremmo dire: senza mai staccare la penna dal foglio!

Soluzione:



Una volta conclusa l'attività, i partecipanti vengono invitati a riflettere sulla "regola generale" che permetta di individuare i grafi impossibili a priori. Per aiutarli nel processo (è probabile che, in questa fase, non abbiano ancora ottenuto una conclusione sensata), si propongono altri tre grafi:





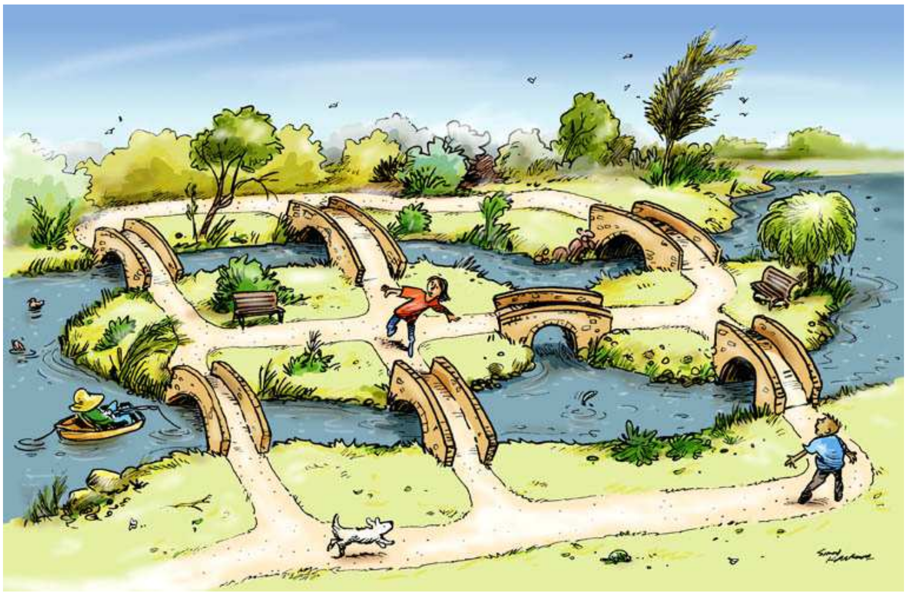
Se si è già individuata la regola generale, sarà facile riconoscere, come unico grafo possibile, quello centrale. Nel primo caso, ci sono 4 punti (nodi) che hanno un numero dispari di entrate/uscite, perciò non è possibile chiudere il percorso con un unico tratto. Nell'ultimo caso, il punto dispari è uno solo. In quello centrale, abbiamo due punti dispari (i punti verdi hanno molteplicità 3) e un punto pari (il rosso, che ha molteplicità 2). È, quindi, possibile chiudere facilmente il percorso. Ciò che conta è che il punto di partenza sia un punto dispari.

La regola generale stabilisce che:

- È possibile chiudere il percorso se tutti i nodi hanno molteplicità pari: in questo caso, punto di partenza e punto di arrivo coincidono e si può partire da dove si vuole.
- È possibile chiudere il percorso se ci sono due nodi con molteplicità dispari: in questo caso, punto di partenza e punto di arrivo sono diversi e si trovano sui due nodi con molteplicità dispari.
- In tutti gli altri casi non è possibile chiudere il percorso.

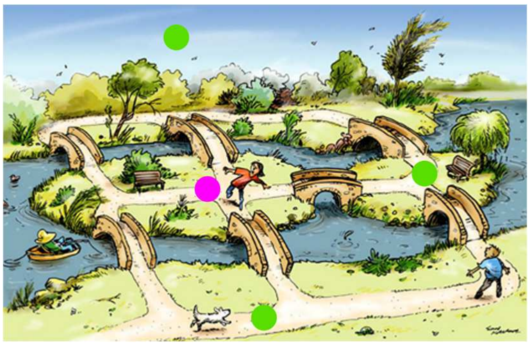
Grafi: un problema famoso!

«Nell'antica città prussiana di Königsberg, oggi l'exclave russa Kaliningrad, c'erano sette ponti che collegavano la terraferma e due grandi isole, circondate dal fiume Pregel. Si racconta che circa tre secoli fa gli abitanti della zona avessero tra i loro passatempi quello di provare ad attraversarli tutti e sette uno di fila all'altro, senza però percorrere lo stesso per due volte, ma che nessuno ci riuscisse mai veramente.»[1]

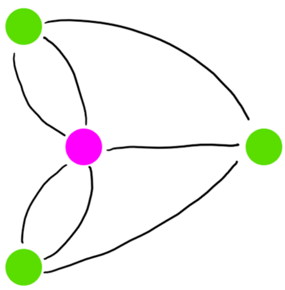


https://simonkneebone.com/2011/11/29/konigsberg-bridge-puzzle/

Ai ragazzi viene proposta un'immagine del problema, (qui sopra quella realizzata da Simon Kneebone – cartoonist e illustratore) e vengono invitati a rappresentarla con un grafo.



Se fossero in difficoltà, li si potrebbe aiutare un po', individuando le 4 regioni (ovvero i 4 nodi) nel disegno: due isole e due rive. Su entrambe le rive approdano tre ponti, perciò corrispondono a nodi con molteplicità 3, esattamente come l'isola più piccola.



Sull'isola più grande approdano cinque ponti, perciò corrisponde a un nodo di molteplicità 5. La rappresentazione è quella a lato.
Secondo le regole individuate in precedenza, trattandosi di un grafo con quattro nodi tutti con molteplicità dispari, non è risolvibile!

---

[1] Emanuele Menietti, Il post: https://www.ilpost.it/2023/03/02/sette-ponti-teoria-grafi/