

Semplifica le seguenti espressioni:

$$1. \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \operatorname{tg} \alpha - \frac{\operatorname{sen}(\pi + \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} + \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)$$

$$= \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \alpha - \frac{-\operatorname{sen} \alpha}{-\cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1 - \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha - (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \mathbf{0}$$

$$2. \quad \operatorname{sen}(\pi - \alpha) \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) - 2 \operatorname{sen} \left(\alpha - \frac{3}{2} \pi \right) \cos(2\pi - \alpha) + \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{5}{2} \pi - \alpha \right)}{\operatorname{ctg}(-\alpha)}$$

$$= \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha - 2 \cos \alpha \cos \alpha + \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{-\operatorname{ctg} \alpha} = \operatorname{sen}^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - \cos^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha - 1 = \mathbf{-3 \cos^2 \alpha}$$

$$3. \quad 4 \cos 240^\circ - \sec 225^\circ (\operatorname{sen} 240^\circ - \sqrt{3} \cos 120^\circ) + \operatorname{tg} 225^\circ$$

$$= 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \left(-\frac{1}{2} \right) \right) + 1 = -2 + 1 = \mathbf{-1}$$

$$4. \quad \frac{\operatorname{sen} \frac{7}{4} \pi \cos \frac{11}{6} \pi - \cos \frac{5}{3} \pi \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right)}{\operatorname{sen} \frac{5}{4} \pi - \cos \frac{7}{4} \pi}$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-\sqrt{3} - 1}{-4} = \frac{\sqrt{3} + 1}{4}$$

$$5. \quad \cos \left(\alpha - \frac{11}{6} \pi \right) - \operatorname{sen} \left(\frac{5}{3} \pi - \alpha \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha = \mathbf{\sqrt{3} \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha}$$

$$6. \quad \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha} (\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha) - \operatorname{sen} 2\alpha$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha} (\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha) - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \frac{(\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha)(\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha} (\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha) - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha =$$

$$= (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)^2 - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \mathbf{1}$$

$$7. \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{cosec} \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha$$

$$= \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} + \operatorname{ctg} \alpha - \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} + 2 \operatorname{sen} \alpha = \frac{1 - \cos \alpha + \cos \alpha - 1}{\operatorname{sen} \alpha} + 2 \operatorname{sen} \alpha = \mathbf{2 \operatorname{sen} \alpha}$$

8. Trasforma in $t = tg \frac{\alpha}{2}$ la seguente espressione: $\frac{2 \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha + 1}{\operatorname{sen} \alpha}$

$$= \frac{2 \cdot \frac{2t}{t^2+1} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{4t+1-t^2+1+t^2}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{4t+2}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{4t+2}{2t} = \frac{2(2t+1)}{2t} = \frac{2t+1}{t}$$

9. Data la parabola $y = x^2 + 8x + 22$, determina la sua simmetrica rispetto al punto $M(-1; 5)$.

Scrivo innanzi tutto le equazioni della simmetria, sia dirette che inverse:

$$\begin{cases} x' = -2 - x \\ y' = 10 - y \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 - x' \\ y = 10 - y' \end{cases}$$

Applico le equazioni della trasformazione inversa all'equazione della parabola per determinare l'equazione della simmetrica:

$$\begin{aligned} 10 - y &= (-2 - x)^2 + 8(-2 - x) + 22 \\ 10 - y &= 4 + 4x + x^2 - 16 - 8x + 22 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{-x^2 + 4x} \end{aligned}$$

10. Trasla la curva $xy = 1$ secondo il vettore $\vec{v}(3; -1)$.

Scrivo innanzi tutto le equazioni della traslazione, sia dirette che inverse:

$$\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = x' - 3 \\ y = y' + 1 \end{cases}$$

Applico le equazioni della trasformazione inversa all'equazione della curva per determinare l'equazione della simmetrica:

$$\begin{aligned} (x-3)(y+1) &= 1 \\ xy + x - 3y - 3 - 1 &= 0 \\ y(x-3) &= -x + 4 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{\frac{4-x}{x-3}} \end{aligned}$$

11. Le circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 2x - 12y + 28 = 0$ e $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 20 = 0$ sono una la simmetrica dell'altra rispetto a un punto M. Trova le coordinate di M.

Determino il centro delle due circonferenze:

$$C_1(1; 6) \quad C_2(5; 2)$$

Determinando il punto medio tra i due centri, trovo le coordinate di M, il centro di simmetria:

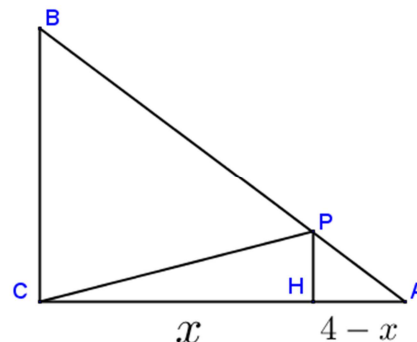
$$\mathbf{M(3; 4)}$$

12. In un triangolo rettangolo ABC le misure dei cateti sono $\overline{AC} = 4$, $\overline{BC} = 3$. Sull'ipotenusa AB determina un punto P in modo che risulti $\overline{PC}^2 = k^2, k > 0$.

Rappresento il triangolo rettangolo ABC.

Considero un generico punto P sull'ipotenusa AB e la sua proiezione H sul cateto AC.

Indico con x il segmento CH.



Valutiamo i due casi limite:

$$P \equiv B: x = 0: \overline{PC} = \overline{BC} = 3 \Rightarrow k = 3 \text{ acc.}$$

$$P \equiv A: x = 4: \overline{PC} = \overline{AC} = 4 \Rightarrow k = 4 \text{ acc.}$$

Perciò: $0 \leq x \leq 4$.

Determiniamo l'equazione generica, considerando che il triangolo APH è simile al triangolo ABC:

$$\overline{PH} : \overline{BC} = \overline{HA} : \overline{AC} \Rightarrow \overline{PH} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{HA}}{\overline{AC}} = \frac{3(4-x)}{4}$$

Per determinare il lato PC applico il teorema di Pitagora:

$$\overline{PC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HP}^2 = x^2 + \frac{9}{16}(4-x)^2$$

La relazione data diventa:

$$\frac{25}{16}x^2 - \frac{9}{2}x + 9 = k^2$$

Perciò il sistema è:

$$\begin{cases} 25x^2 - 72x + 144 - 16k^2 = 0 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

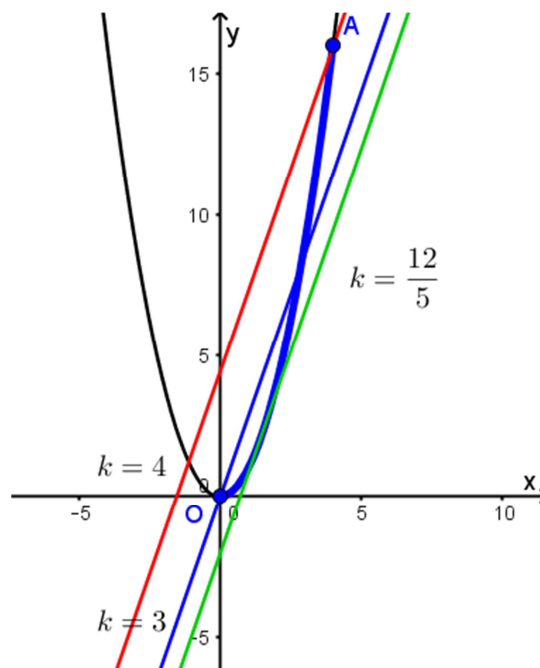
E, applicando il metodo della parabola fissa:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ 25y - 72x + 144 - 16k^2 = 0 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Impongo il passaggio del fascio per i due punti limite A e O:

$$O(0;0): 144 - 16k^2 = 0 \Rightarrow k = 3$$

$$A(4;16): 400 - 288 + 144 - 16k^2 = 0 \Rightarrow k = 4$$



Determino il valore del parametro per la retta tangente:

$$25x^2 - 72x + 144 - 16k^2 = 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4} = 36^2 - 25(144 - 16k^2) = 0 \quad 81 - 225 + 25k^2 = 0 \quad k = \frac{12}{5}$$

Concludendo quindi:

$$1 \text{ soluzione per } 3 < k \leq 4 \quad 2 \text{ soluzioni per } \frac{12}{5} \leq k \leq 3$$