Semplifica le seguenti espressioni:

1. $$tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) tg\,\alpha-\frac{sen\,(\pi+\alpha)}{\cos\,(\pi-\alpha)}+ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-sen^2\alpha-sen^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

$$=ctg\,\alpha\;\,tg\,\alpha-\frac{-sen\,\alpha}{-\cos\alpha}+tg\,\alpha-sen^2\alpha-\cos^2\alpha=1-tg\,\alpha+tg\,\alpha-(sen^2\alpha+\cos^2\alpha)=\mathbf{0}$$

2. $$sen\,(\pi-\alpha)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-2\,sen\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\cos\,(2\pi-\alpha)+\frac{tg\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)}{ctg\,(-\alpha)}$$

$$=sen\,\alpha\;sen\,\alpha-2\cos\alpha\cos\alpha+\frac{ctg\,\alpha}{-ctg\,\alpha}=sen^2\alpha-2\cos^2\alpha-1=1-\cos^2\alpha-2\cos^2\alpha-1=\boldsymbol{-3\cos^2\alpha}$$

3. $$4\cos 240°-\sec 225°\,\left(sen\,240°-\sqrt{3}\cos 120°\right)+tg\,225°$$

$$=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)+1=-2+1=\mathbf{-1}$$

4. $$\frac{sen\frac{7}{4}\pi\;\cos\frac{11}{6}\pi-\cos\frac{5}{3}\pi\;\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{sen\frac{5}{4}\pi-\cos\frac{7}{4}\pi}$$

$$=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{-\sqrt{3}-1}{-4}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}+1}{4}}$$

5. $$\cos\left(\alpha-\frac{11}{6}\pi\right)-sen\left(\frac{5}{3}\pi-\alpha\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}sen\,\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}sen\,\alpha=\boldsymbol{\sqrt{3}\cos\alpha-sen\,\alpha}$$

6. $$\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha-sen\,\alpha}(sen\,\alpha+\cos\alpha)-sen\,2\alpha$$

$$=\frac{\cos^2\alpha-sen^2\alpha}{\cos\alpha-sen\,\alpha}(sen\,\alpha+\cos\alpha)-2sen\alpha\cos\alpha=\frac{(\cos\alpha-sen\,\alpha)(\cos\alpha+sen\,\alpha)}{\cos\alpha-sen\,\alpha}(sen\,\alpha+\cos\alpha)-2\,sen\alpha\cos\alpha=$$
$$=(\cos\alpha+sen\,\alpha)^2-2\,sen\,\alpha\cos\alpha=\cos^2\alpha+sen^2\alpha+2\,sen\,\alpha\cos\alpha-2\,sen\,\alpha\cos\alpha=\mathbf{1}$$

7. $$tg\frac{\alpha}{2}+ctg\,\alpha-cosec\,\alpha+2\,sen\,\alpha$$

$$=\frac{1-\cos\alpha}{sen\,\alpha}+ctg\,\alpha-\frac{1}{sen\,\alpha}+2\,sen\,\alpha=\frac{1-\cos\alpha+\cos\alpha-1}{sen\,\alpha}+2\,sen\,\alpha=\boldsymbol{2\,sen\,\alpha}$$

8. Trasforma in $t = tg\frac{\alpha}{2}$ la seguente espressione: $\frac{2\,sen\,\alpha+\cos\alpha+1}{sen\,\alpha}$

$$= \frac{2\cdot\frac{2t}{t^2+1}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{\frac{4t+1-t^2+1+t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{4t+2}{2t} = \frac{2(2t+1)}{2t} = \boldsymbol{\frac{2t+1}{t}}$$

9. Data la parabola $y = x^2 + 8x + 22$, determina la sua simmetrica rispetto al punto $M\ (-1; 5)$.

Scrivo innanzi tutto le equazioni della simmetria, sia dirette che inverse:

$$\begin{cases} x' = -2 - x \\ y' = 10 - y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2 - x' \\ y = 10 - y' \end{cases}$$

Applico le equazioni della trasformazione inversa all'equazione della parabola per determinare l'equazione della simmetrica:

$$10 - y = (-2 - x)^2 + 8\,(-2 - x) + 22$$

$$10 - y = 4 + 4x + x^2 - 16 - 8x + 22$$

$$\boldsymbol{y = -x^2 + 4x}$$

10. Trasla la curva $xy = 1$ secondo il vettore $\vec{v}\ (3;\ -1)$.

Scrivo innanzi tutto le equazioni della traslazione, sia dirette che inverse:

$$\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x' - 3 \\ y = y' + 1 \end{cases}$$

Applico le equazioni della trasformazione inversa all'equazione della curva per determinare l'equazione della simmetrica:

$$(x - 3)(y + 1) = 1$$

$$xy + x - 3y - 3 - 1 = 0$$

$$y\,(x - 3) = -x + 4$$

$$\boldsymbol{y = \frac{4 - x}{x - 3}}$$

11. Le circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 2x - 12\,y + 28 = 0$ e $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 20 = 0$ sono una la simmetrica dell'altra rispetto a un punto M. Trova le coordinate di M.

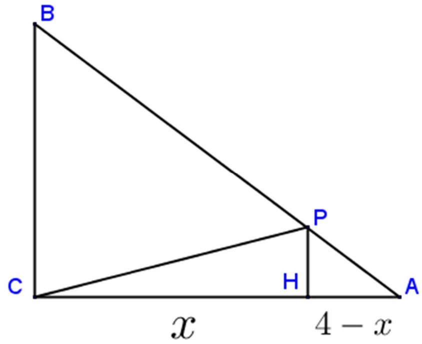
Determino il centro delle due circonferenze:

$$C_1\ (1; 6) \qquad C_2\ (5; 2)$$

Determinando il punto medio tra i due centri, trovo le coordinate di M, il centro di simmetria:

$$\boldsymbol{M\ (3; 4)}$$

12. In un triangolo rettangolo ABC le misure dei cateti sono $\overline{AC} = 4$, $\overline{BC} = 3$. Sull'ipotenusa AB determina un punto P in modo che risulti $\overline{PC}^2 = k^2, k > 0$.




Rappresento il triangolo rettangolo ABC.
Considero un generico punto P sull'ipotenusa AB e la sua proiezione H sul cateto AC.
Indico con x il segmento CH.

Valutiamo i due casi limite:

$$P \equiv B: x = 0: \ \overline{PC} = \overline{BC} = 3 \quad \Longrightarrow \quad k = 3 \quad acc.$$
$$P \equiv A: x = 4: \ \overline{PC} = \overline{AC} = 4 \quad \Longrightarrow \quad k = 4 \quad acc.$$

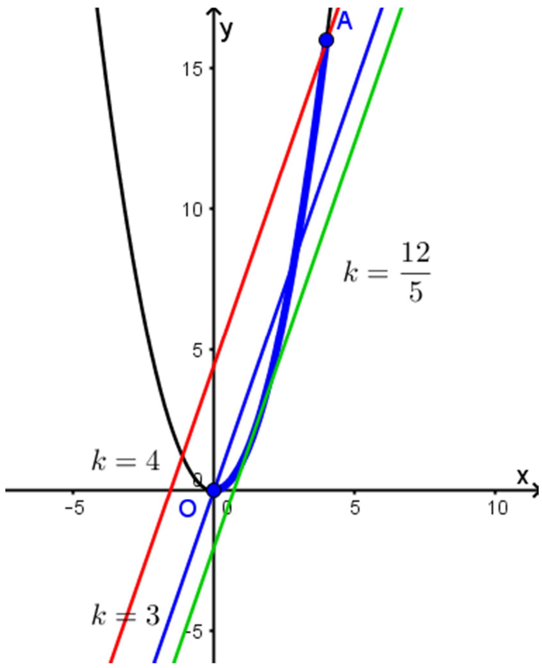
Perciò: $0 \le x \le 4$.

Determiniamo l'equazione generica, considerando che il triangolo APH è simile al triangolo ABC:

$$\overline{PH}:\overline{BC} = \overline{HA}:\overline{AC} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{PH} = \frac{\overline{BC}\cdot\overline{HA}}{\overline{AC}} = \frac{3\,(4-x)}{4}$$

Per determinare il lato PC applico il teorema di Pitagora:

$$\overline{PC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HP}^2 = x^2 + \frac{9}{16}(4-x)^2$$




La relazione data diventa:

$$\frac{25}{16}x^2 - \frac{9}{2}x + 9 = k^2$$

Perciò il sistema è:

$$\begin{cases} 25\,x^2 - 72\,x + 144 - 16\,k^2 = 0 \\ 0 \le x \le 4 \end{cases}$$

E, applicando il metodo della parabola fissa:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ 25y - 72x + 144 - 16\,k^2 = 0 \\ 0 \le x \le 4 \end{cases}$$

Impongo il passaggio del fascio per i due punti limite A e O:

$$O(0;0): \quad 144 - 16\,k^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = 3$$

$$A(4;16): \quad 400 - 288 + 144 - 16k^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = 4$$

Determino il valore del parametro per la retta tangente:

$$25x^2 - 72x + 144 - 16\,k^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Delta}{4} = 36^2 - 25\,(144 - 16\,k^2) = 0 \qquad 81 - 225 + 25\,k^2 = 0 \qquad k = \frac{12}{5}$$

Concludendo quindi:

$$\boldsymbol{1\ soluzione\ per\ \ 3 < k \le 4 \qquad 2\ soluzioni\ per\ \frac{12}{5} \le k \le 3}$$