Svolgi le seguenti espressioni con le frazioni algebriche:

1. $\left(\frac{1}{a+b}-\frac{b}{b^2-a^2}\right):\left(\frac{1}{a-b}-\frac{b}{a^2-ab}+\frac{b^2}{a^3-ab^2}\right)$

$$=\left(\frac{1}{a+b}-\frac{b}{(a+b)(b-a)}\right):\left(\frac{1}{a-b}-\frac{b}{a(a-b)}+\frac{b^2}{a(a^2-b^2)}\right)= \qquad C.E.: a\neq \pm b \ \wedge\ a\neq 0$$

$$=\frac{b-a-b}{(a+b)(b-a)}:\left(\frac{1}{a-b}-\frac{b}{a(a-b)}+\frac{b^2}{a(a-b)(a+b)}\right)=$$

$$=-\frac{a}{(a+b)(b-a)}:\frac{a(a+b)-b(a+b)+b^2}{a(a-b)(a+b)}=\frac{a}{(a+b)(a-b)}:\frac{a^2+ab-ab-b^2+b^2}{a(a-b)(a+b)}=$$

$$=\frac{a}{(a+b)(a-b)}:\frac{a(a-b)(a+b)}{a^2}=\mathbf{1}$$

2. $\left(\frac{x-y}{x+y}-1\right)\left(1+\frac{x+y}{x-y}\right)^{-1}\cdot\frac{2x^2+2xy}{y^2-xy}$

$$=\frac{x-y-x-y}{x+y}\cdot\left(\frac{x-y+x+y}{x-y}\right)^{-1}\cdot\frac{2x(x+y)}{-y(x-y)}= \qquad C.E.: x\neq\pm y \ \wedge\ x\neq 0\ \wedge\ y\neq 0$$

$$=-\frac{2y}{x+y}\cdot\frac{x-y}{2x}\cdot\frac{2x(x+y)}{-y(x-y)}=\mathbf{2}$$

3. $\frac{a}{a-2}-\frac{a}{a+2}:\frac{4}{a^2-a-2}:\frac{a^2-1}{a^2+a-2}$

$$=\frac{a}{a-2}-\frac{a}{a+2}:\frac{4}{(a-2)(a+1)}:\frac{(a-1)(a+1)}{(a+2)(a-1)}= \qquad C.E.: a\neq\pm 2\ \wedge\ a\neq\pm 1$$

$$=\frac{a}{a-2}-\frac{a}{a+2}\cdot\frac{(a-2)(a+1)}{4}\cdot\frac{a+2}{a+1}=$$

$$=\frac{a}{a-2}-\frac{a(a-2)}{4}=\frac{4a-a(a-2)^2}{4(a-2)}=\frac{4a-a(a^2-4a+4)}{4(a-2)}=\frac{4a-a^3+4a^2-4a}{4(a-2)}=\boldsymbol{\frac{a^2(4-a)}{4(a-2)}}$$

Risolvi:

4. $\frac{2x^2-2}{x^3+1}+\frac{2-x^2}{x^2-x+1}+\frac{x}{x+1}=0$

$$\frac{2x^2-2}{(x+1)(x^2-x+1)}+\frac{2-x^2}{x^2-x+1}+\frac{x}{x+1}=0$$

$$\frac{2x^2-2+(x+1)(2-x^2)+x(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=0 \qquad C.A.: x\neq -1$$

$$2x^2-2+2x-x^3+2-x^2+x^3-x^2+x=0 \qquad 3x=0 \qquad \boldsymbol{x=0} \qquad \boldsymbol{acc.}$$

5. $\frac{3x}{4x^2-1}+\frac{2x+7}{4x}=4-\frac{3x}{1-4x^2}$

$$\frac{3x}{4x^2-1}+\frac{2x+7}{4x}=4+\frac{3x}{4x^2-1} \qquad \frac{2x+7}{4x}=4 \qquad C.A.: x \neq \pm\frac{1}{2} \wedge x \neq 0$$

$$\frac{2x+7-16x}{4x}=0 \qquad -14x=-7 \qquad x=\frac{1}{2} \quad non\ acc. per\ C.A. \quad \Rightarrow \quad \nexists x \in \mathbb{R}$$

6. $\frac{6(a-3x)}{a^2-16}-\frac{2x+1}{a+4}=\frac{5-3x}{a-4}$

$$\frac{6a-18x}{(a-4)(a+4)}-\frac{2x+1}{a+4}=\frac{5-3x}{a-4} \qquad \frac{6a-18x-(2x+1)(a-4)-(5-3x)(a+4)}{(a-4)(a+4)}=0 \qquad C.E.: a \neq \pm 4$$

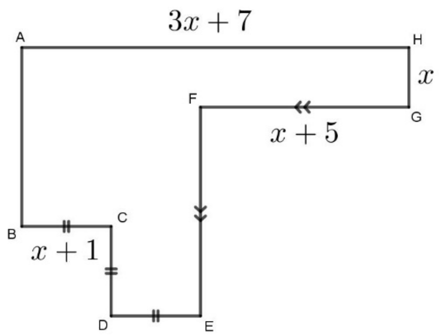
$$6a-18x-2ax+8x-a+4-5a-20+3ax+12x=0 \qquad 2x+ax=16 \qquad x(a+2)=16$$

$\boldsymbol{Se\ (a=4 \quad \vee \quad a=-4) \qquad l'equazione\ perde\ significato}$

$\boldsymbol{Se\ a=-2 \qquad \nexists x \in \mathbb{R}}$

$\boldsymbol{Se\ (a \neq \pm 4 \quad \wedge \quad a \neq -2) \qquad x=\frac{16}{a+2}}$

7. Utilizzando i dati della figura a lato, determina il valore di x, sapendo che il suo perimetro vale 44.



Per determinare il perimetro, faccio prima alcune considerazioni:

$$\overline{AH} \cong \overline{BC}+\overline{DE}+\overline{FG} \qquad \overline{AB}+\overline{CD} \cong \overline{EF}+\overline{HG}$$

Perciò il perimetro è dato da:

$$2p=\overline{AH}+\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{FG}+\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}+\overline{HG}=$$

$$=2\overline{AH}+2(\overline{EF}+\overline{HG})=2(3x+7)+2(x+5+x)$$

Otteniamo, quindi, l'equazione:

$$2(3x+7)+2(2x+5)=44 \qquad 3x+7+2x+5=22$$

$$5x=10 \qquad \boldsymbol{x=2}$$

8. $\begin{cases} \frac{1}{2}\left(x-\frac{4}{3}\right)+\left(3-\frac{x}{2}\right)^2<\frac{x^2}{4}+\frac{x-1}{3}-\frac{2x+5}{2}+2 \\ \frac{1-x}{1-\frac{1}{3}}+\frac{1-\frac{2x}{3}}{1+\frac{1}{3}}>7x+(1-x)^2-(x+1)(x-1) \end{cases}$

Risolviamo le due disequazioni separatamente. Cominciamo con la prima, moltiplicando tutto per 12, per semplificare le frazioni:

$$6\left(x-\frac{4}{3}\right)+12\left(9-3x+\frac{x^2}{4}\right)<3x^2+4(x-1)-6(2x+5)+24$$

$$6x-8+108-36x+3x^2<3x^2+4x-4-12x-30+24 \qquad -22x<-110 \qquad x>5$$

$$\frac{3}{2}(1-x)+\frac{3}{4}\left(1-\frac{2x}{3}\right)>7x+1-2x+x^2-(x^2-1)$$

$$6-6x+3-2x>28x+4-8x+4x^2-4x^2+4 \qquad -28x>-1 \qquad x<\frac{1}{28}$$

Mettendo a sistema le due soluzioni, troviamo che il sistema è impossibile, $\nexists x \in \mathbb{R}$.

9. Trova l'intervallo di soluzioni tale per cui il quoziente tra il doppio di un numero e la differenza tra 1 e la terza parte del numero stesso sia positivo.

$$\frac{2x}{1-\frac{x}{3}} > 0 \qquad \begin{array}{ll} N>0: & x>0 \\ D>0: & x<3 \end{array} \qquad \mathbf{0 < x < 3}$$

10. $2x - a \geq a\,(1-x)$

$$2x - a \geq a - ax \qquad 2x + ax \geq 2a \qquad x(a+2) \geq 2a$$

$$Se\;\; a > -2: \quad \boldsymbol{x \geq \frac{2a}{a+2}} \qquad Se\;\; a < -2: \quad \boldsymbol{x \leq \frac{2a}{a+2}} \qquad Se\;\; a = -2: \quad \boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}}$$

11. $|3x-2| < 7 + 6x$

$$|3x-2| = \begin{cases} 3x-2 & se\ x \geq \frac{2}{3} \\ -3x+2 & se\ x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

Possiamo distinguere due casi:

$$\begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ 3x - 2 < 7 + 6x \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ -3x + 2 < 7 + 6x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x > -3 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ x > -\frac{5}{9} \end{cases}$$

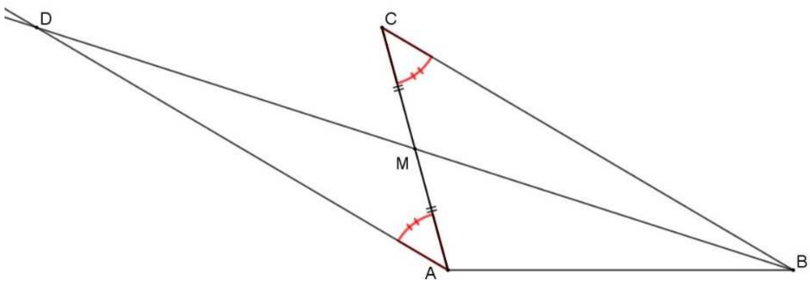
$$x \geq \frac{2}{3} \quad \vee \quad -\frac{5}{9} < x < \frac{2}{3}$$

Unendo le due soluzioni, otteniamo: $\boldsymbol{x > -\frac{5}{9}}$

12. Nel triangolo qualsiasi ABC, consideriamo la mediana BM e la semiretta di origine A che incontra il prolungamento di BM in D e tale che $D\hat{A}C \cong A\hat{C}B$. Dimostra che $AD \cong BC$.

Hp:
ABC triangolo qualsiasi
$M \in AC$
$AM \cong MC$
B, M, D allineati
$D\hat{A}C \cong A\hat{C}B$

Tesi: $AD \cong BC$



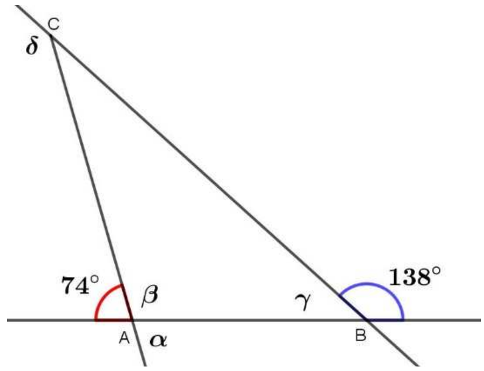
Dimostrazione:
Considero i triangoli AMD e CMB. Essi hanno:

$AM \cong MC$ per ipotesi
$D\hat{A}C \cong A\hat{C}B$ per ipotesi
$D\widehat{M}A \cong C\widehat{M}B$ perché angoli opposti al vertice (B, M, D sono allineati per ipotesi e $M \in AC$ per ipotesi, quindi A, M, C allineati)

I due triangoli AMD e CMB sono congruenti per il secondo criterio di congruenza, di conseguenza $AD \cong BC$, perché elementi corrispondenti in triangoli congruenti.

□

13. Determina le misure delle ampiezze degli angoli indicati nella figura 1, spiegando il tuo ragionamento ed enunciando i teoremi usati.



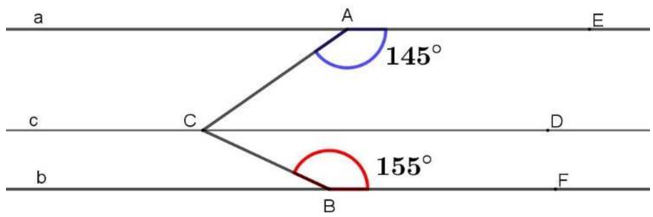
L'angolo $\boldsymbol{\alpha \cong 74°}$, in quanto angolo opposto al vertice di quello dato: due angoli opposti al vertice sono sempre congruenti.
Possiamo quindi determinare gli angoli adiacenti β e γ, che sono supplementari dei due angoli dati e quindi hanno ampiezza rispettivamente:

$$\beta \cong 180° - \alpha \cong \mathbf{106°} \qquad \gamma \cong 180° - 138° \cong \mathbf{42°}$$

A questo punto, per determinare l'angolo δ possiamo applicare il secondo teorema dell'angolo esterno, secondo il quale: un angolo esterno di un triangolo è congruente alla somma dei due angoli interni ad esso non adiacenti:

$$\delta \cong \beta + \gamma \cong 106° + 42° = \mathbf{148°}$$

14. Trova l'ampiezza dell'angolo $A\hat{C}B$ indicato in figura 2, spiegando il tuo ragionamento.



Individuo sulla retta a il punto E e sulla retta b il punto F. Traccio la retta c passante per C e parallela alle due rette date. Individuo su di essa il punto D.
Considero le due rette parallele a e c: gli angoli $E\hat{A}C$ e $A\hat{C}D$ sono angoli coniugati e quindi supplementari, perciò:

$$A\hat{C}D \cong 180° - E\hat{A}C \cong 35°$$

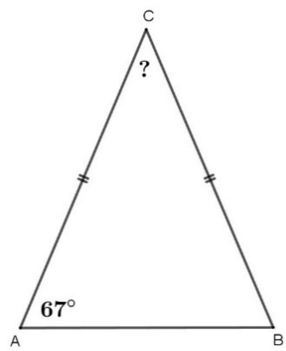
Analogamente, considero le due rette parallele c e b: gli angoli $D\hat{C}B$ e $C\hat{B}F$ sono angoli coniugati e quindi supplementari, perciò:

$$D\hat{C}B \cong 180° - C\hat{B}F \cong 25°$$

Abbiamo tutti gli elementi per determinare l'angolo richiesto:

$$A\hat{C}B \cong D\hat{C}B + A\hat{C}D \cong 25° + 35° = \mathbf{60°}$$

15. Determina le misure delle ampiezze dell'angolo indicato nella figura a lato, spiegando il tuo ragionamento ed enunciando i teoremi usati.



Il triangolo rappresentato è isoscele, perciò gli angoli alla base sono congruenti, ovvero:

$$C\hat{A}B \cong A\hat{B}C \cong 67°$$

La somma degli angoli interni di un triangolo è $180°$, ovvero:

$$C\hat{A}B + A\hat{B}C + B\hat{C}A \cong 180° \quad \Rightarrow \quad B\hat{C}A \cong 180° - C\hat{A}B - A\hat{B}C \cong \mathbf{46°}$$