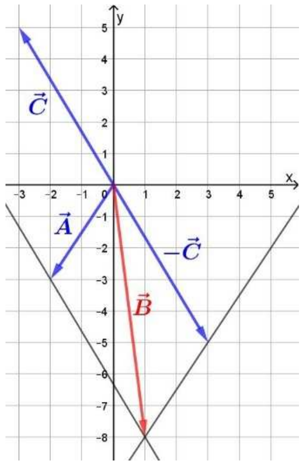
1. Siano dati i vettori $\vec{A}\,(-2;\ -3)$ e $\vec{C}\,(-3;\ 5)$. Rappresenta i vettori e determina le componenti del vettore $\vec{B}$, tale che $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$.



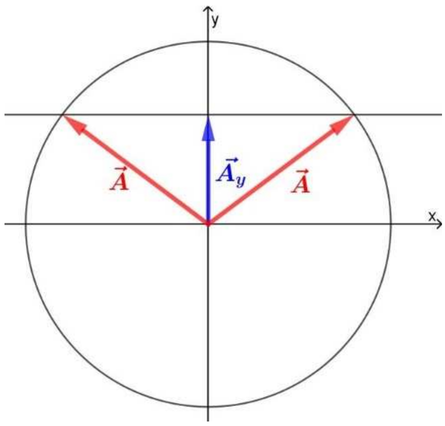

Dato che $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$, possiamo dedurne che: $\vec{B} = \vec{A} - \vec{C}$.

Possiamo risolvere il problema graficamente, come indicato nella figura a lato, o usando le componenti:

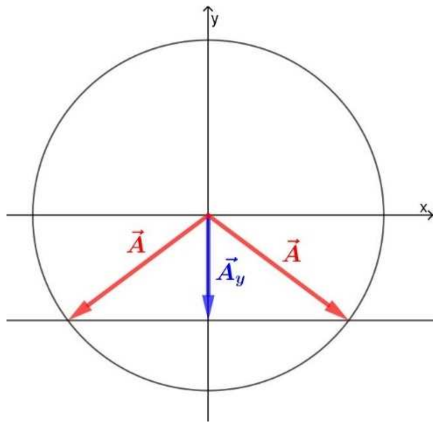
$$\vec{B} = (-2;\ -3) - (-3; 5) = (-2 + 3;\ -3 - 5) = \mathbf{(1;\ -8)}$$

2. Sono noti il modulo $A$ e la componente $A_y$ di un vettore. Sapendo che $A_x \neq 0$, quanti vettori si possono individuare con queste caratteristiche? Come sono disposti nel piano? Motiva le tue risposte.

Per ogni componente $A_y$, si possono individuare **2** vettori diversi, **simmetrici rispetto all'asse $y$** e determinati rappresentando la componente data, tracciando una circonferenza con centro nell'origine e raggio pari al modulo del vettore, e, infine, tracciando la parallela all'asse $x$ passante per la punta del vettore $A_y$. I due vettori risultanti hanno coda nell'origine e punta nel punto di intersezione così determinato.




$A_y > 0$




$A_y < 0$

3. Il vettore $\vec{A}$ ha modulo 2,4 e forma un angolo di $60°$ con l'asse $x$. Il vettore $\vec{B}$ ha modulo 1,6 e forma un angolo di $130°$ con l'asse $x$. Determina il modulo del vettore somma e l'angolo che esso forma con l'asse $x$.

Per cominciare, determiniamo le componenti dei due vettori dati:

$$A_x = A\cos 60° = 1{,}2 \qquad A_y = A\sin 60° = 2{,}1$$
$$B_x = B\cos 130° = -1{,}0 \qquad B_y = B\sin 130° = 1{,}2$$

Possiamo quindi determinare le componenti del vettore somma:

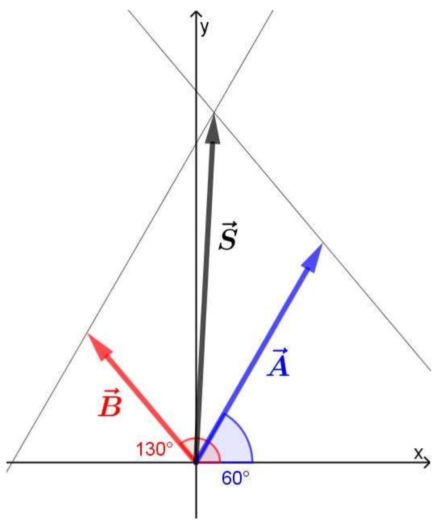
$$S_x = A_x + B_x = 0{,}2 \qquad S_y = A_y + B_y = 3{,}3$$

È possibile determinare il modulo del vettore somma, applicando il teorema di Pitagora alle sue componenti:

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \mathbf{3,3}$$

Per determinare l'angolo formato dal vettore somma, ricordo che:

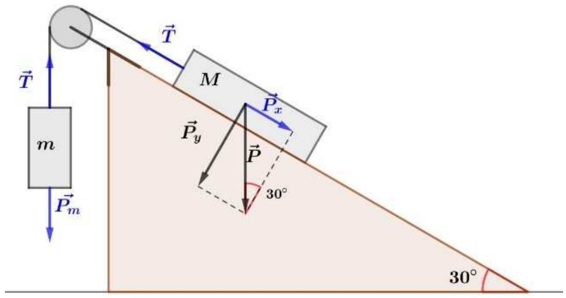
$$S_x = S\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{S_x}{S} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \cos^{-1}\frac{S_x}{S} = \mathbf{87°}$$



4. I due piani inclinati nelle figure 1 e 2 presentano attrito trascurabile e la massa $M$ vale $200\ g$. Determina il valore della massa $m$ che garantisce l'equilibrio del sistema in ciascuno dei due casi.

Perché il sistema sia in equilibrio, secondo la rappresentazione a lato, la componente della forza peso della massa M parallela al piano deve essere uguale al peso della massa m, ovvero:

$$P_x = P_m$$




Per determinare la componente $P_x$, scompongo la forza peso della massa M secondo le componenti parallela e perpendicolare al piano inclinato e noto che si viene a determinare un triangolo rettangolo simile al piano inclinato, in maniera tale che l'angolo opposto a $P_x$ sia di 30°, come l'angolo formato dal piano inclinato con l'orizzontale. In altre parole:

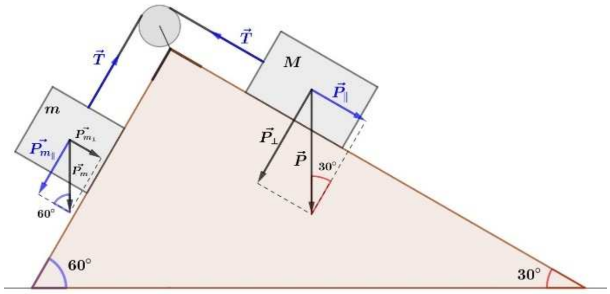
$$P_x = P \sin 30°$$

Adesso abbiamo tutti gli elementi per risolvere il problema:

$$P \sin 30° = P_m \quad \Rightarrow \quad Mg \sin 30° = mg \quad \Rightarrow \quad m = M \sin 30° = \mathbf{100\ g}$$

Perché il sistema sia in equilibrio, secondo la rappresentazione a lato, la componente della forza peso della massa M parallela al piano deve essere uguale alla componente della forza peso della massa m parallela al secondo piano inclinato. In altre parole:

$$P_{\parallel} = P_{m_{\parallel}}$$




Per determinare le due componenti, facciamo lo stesso ragionamento fatto al punto precedente:

$$P_{\parallel} = P \sin 30° \qquad\qquad P_{m_{\parallel}} = P_m \sin 60°$$

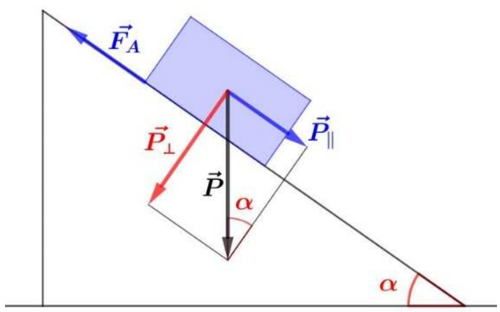
Adesso abbiamo tutti gli elementi per risolvere il problema:

$$P \sin 30° = P_m \sin 60° \quad \Rightarrow \quad Mg \sin 30° = mg \sin 60° \quad \Rightarrow \quad m = M\,\frac{\sin 30°}{\sin 60°} = \mathbf{115\ g}$$

5. Una cassa è ferma in equilibrio su un piano inclinato. Il coefficiente di attrito statico fra la cassa e il piano è $0{,}70$. L'angolo che il piano inclinato forma con l'orizzontale è il minimo per il quale il corpo scivola. Calcola l'ampiezza dell'angolo.

Siccome l'angolo che il piano inclinato forma con l'orizzontale è il minimo per il quale il corpo scivola e la cassa è ferma in equilibrio, la forza d'attrito eguaglia la componente della forza peso della cassa parallela al piano, ovvero:

$$P_{\parallel} = F_A$$




La forza d'attrito è data dal prodotto tra il coefficiente d'attrito e il modulo della forza premente, ovvero la componente perpendicolare al piano della forza peso:

$$F_A = \mu\, P_{\perp} = \mu\, P \cos \alpha$$

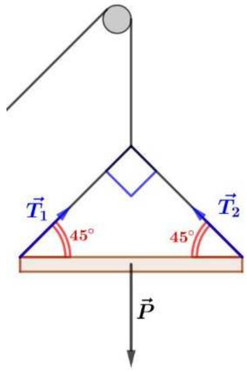
La componente della forza peso parallela al piano è data da: $P_{\parallel} = P \sin \alpha$.

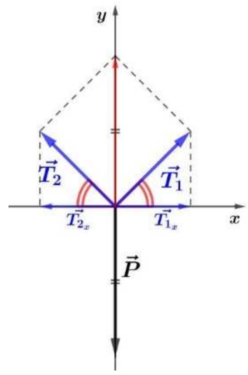
Eguagliando le due forze otteniamo:

$$\mu\, P \cos \alpha = P \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1} \mu = \mathbf{35°}$$

6. Una sbarra di ferro di 360 kg è sostenuta alle sue estremità da due cavi come mostrato nella figura a lato. Qual è la tensione in ogni cavo? Risolvi il problema dopo aver rappresentato la situazione nel piano cartesiano.

Notiamo innanzi tutto che gli angoli alla base del triangolo individuato dalla sbarra e dalle due funi, essendo congruenti e angoli acuti di un triangolo rettangolo, sono entrambi di **45°**. Inoltre, per semplificare la situazione, rappresentiamo le forze in un piano cartesiano. Procediamo, quindi, studiando la situazione per le componenti lungo l'asse $x$ e quelle lungo l'asse $y$:



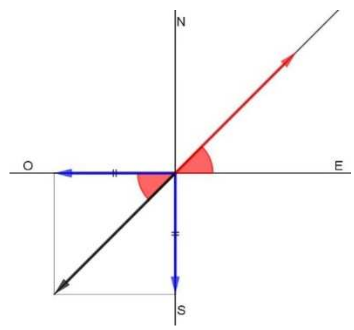

$$\begin{matrix} asse\ x: \\ asse\ y: \end{matrix} \begin{cases} \overrightarrow{T_{1_x}} + \overrightarrow{T_{2_x}} = 0 \\ \overrightarrow{T_{1_y}} + \overrightarrow{T_{2_y}} + \vec{P} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} T_1 \cos 45° - T_2 \cos 45° = 0 \\ T_1 \sin 45° + T_2 \sin 45° - P = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo che $T_1 = T_2$ e, indicando entrambe le tensioni con T, la seconda equazione diventa:

$$T \sin 45° + T \sin 45° - P = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\,T \sin 45° = P \quad \Rightarrow \quad T = \frac{P}{2 \sin 45°} = \frac{mg}{2 \sin 45°} = \mathbf{2,5 \cdot 10^3\ N}$$

7. Tre forze agiscono su un oggetto. Una forza ha modulo 30 N ed è diretta verso sud; un'altra forza ha modulo 30 N ed è diretta verso ovest. L'oggetto è in equilibrio. Determina il modulo e la direzione della terza forza.

Per mantenere in equilibrio l'oggetto, la forza necessaria sarà opposta alla somma delle due forze date, ovvero avrà la stessa direzione, lo stesso modulo, ma verso opposto (nel disegno, ho indicato in nero la somma delle due forze e in rosso la terza forza). Siccome le due forze date sono tra loro congruenti e perpendicolari, la somma formerà con esse angoli di 45° e **45°** sarà proprio l'angolo formato dalla terza forza con la direzione Est-Ovest (indicati in rosso nel disegno). Per determinare il modulo della terza forza, non resta che applicare il teorema di Pitagora alle due forze indicate in blu, trattandosi di forze perpendicolari:



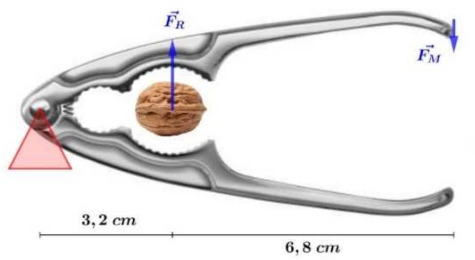

$$F = \sqrt{F_O^2 + F_E^2} = \mathbf{42\ N}$$

8. Per schiacciare una noce con uno schiaccianoci (figura 4), Paola deve applicare una forza di modulo almeno 20 N. Calcola la forza necessaria per rompere il guscio della noce.

Se schematizziamo la situazione dello schiaccianoci, troviamo una leva di secondo genere, dove:

$$F_M = 20\ N \qquad b_R = 3{,}2\ cm \qquad b_M = (6{,}8 + 3{,}2)\ cm = 10\ cm$$

Sapendo che una leva rimane in equilibrio quando le forze applicate sono inversamente proporzionali ai loro bracci, otteniamo:

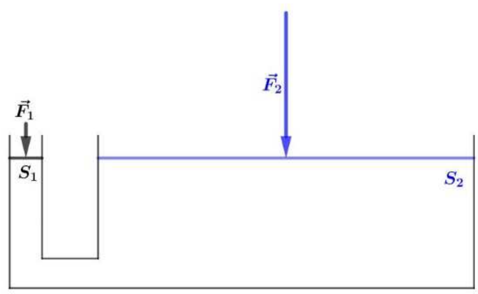



$$F_R b_R = F_M b_M \quad \Rightarrow \quad F_R = F_M \frac{b_M}{b_R} = \mathbf{63\ N}$$

9. La poltrona di un dentista pesa 715 N. Per sollevare un paziente, il dentista deve applicare una forza minima di modulo 35 N. L'area del pistone collegato alla poltrona è 40 volte più grande dell'area del pistone collegato al pedale. I due pistoni si trovano alla stessa altezza. Determina la massa del paziente.

$$P = 715\ N \qquad F_1 = 35\ N \qquad S_2 = 40\ S_1$$

La forza esercitata sul pistone più grande è data dal peso della poltrona e dal peso del paziente, ovvero: $F_2 = P + P_p$, inoltre, quando i due pistoni si trovano alla stessa altezza, la pressione esercitata sui due pistoni è la stessa e dato che la pressione è data dal rapporto tra forza e superficie, otteniamo:




$$\frac{F_2}{S_2} = \frac{F_1}{S_1} \quad \Rightarrow \quad F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1} = F_1 \frac{40\ S_1}{S_1} = 40\ F_1$$

$$P + P_p = 40\ F_1 \quad \Rightarrow \quad P_p = 40\ F_1 - P \quad \Rightarrow \quad mg = 40 F_1 - P \quad \Rightarrow \quad m = \frac{40\ F_1 - P}{g} = \mathbf{70\ kg}$$

10. Un tubo a U è riempito con acqua. In uno dei due rami viene poi aggiunto dell'olio (con densità $800\ kg/m^3$). I due fluidi sono in equilibrio (figura 5). L'altezza della colonna di olio è 15 cm. I due rami del tubo sono aperti superiormente. Determina l'altezza della colonna d'acqua sopra il punto A.

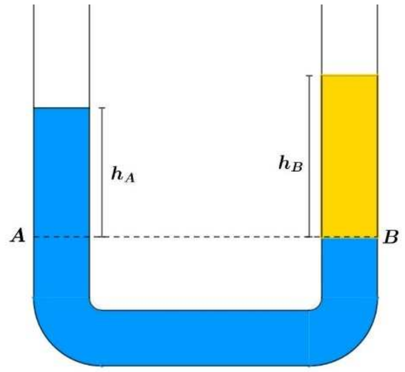
$$d_A = 1000\ kg/m^3 \qquad d_B = 800\ kg/m^3 \qquad h_B = 15\ cm$$

La pressione esercitata nel punto A è uguale a quella esercitata nel punto B, dato che i due fluidi sono in equilibrio. Possiamo, quindi, applicare la legge di Stevino:

$$p_o + d_A h_A g = p_o + d_B h_B g$$

La pressione atmosferica, presente visto che i due rami del tubo sono aperti superiormente, si semplifica e possiamo ricavare l'altezza della colonna d'acqua:

$$d_A h_A g = d_B h_B g \quad \Rightarrow \quad h_A = h_B \frac{d_B}{d_A} = \mathbf{12\ cm}$$




11. Due cubi hanno la stessa massa, ma il secondo ha spigolo doppio del primo. Qual è il rapporto tra la pressione del primo e la pressione del secondo?

La pressione è data dal rapporto tra forza e superficie. La forza esercitata è la stessa, visto che i due cubi hanno la stessa massa e la forza, in questo caso, è data dal peso, ma il primo ha la superficie della faccia data da $S_1 = l^2$, dove $l$ è la lunghezza dello spigolo, e il secondo ha superficie $S_2 = (2l)^2 = 4l^2 = 4S_1$. Il rapporto tra le pressioni è dato, quindi, da:

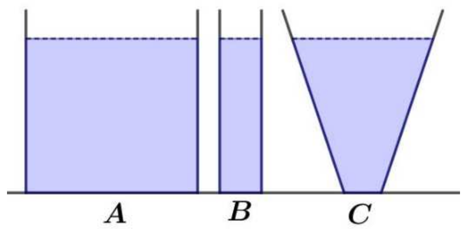
$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\frac{P}{S_1}}{\frac{P}{S_2}} = \frac{P}{S_1} \cdot \frac{S_2}{P} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{4S_1}{S_1} = \mathbf{4}$$

12. I tre recipienti della figura 6 sono riempiti di acqua e sono realizzati con un materiale leggerissimo (il cui peso può essere trascurabile rispetto a quello dell'acqua). Metti i tre recipienti in ordine crescente di pressione e motiva la tua risposta.

Le pressioni esercitate sul fondo sono le stesse, perché la pressione esercitata dai tre recipienti è data dalla legge di Stevino:

$$p = p_o + dgh$$

I liquidi sono posti alla stessa altezza, perciò i tre recipienti esercitano la **stessa pressione**.




13.
a. Un recipiente è pieno d'acqua fino all'orlo. Nel momento in cui vi viene calato un oggetto di 3,00 kg, fino ad essere completamente immerso, dal recipiente escono 2,00 kg di acqua. Quanto vale la forza di Archimede che agisce sull'oggetto? Come si comporta l'oggetto, una volta lasciato libero nell'acqua? Motiva la tua risposta.

La forza di Archimede è data dal peso del fluido spostato, perciò: $F_A = mg = \mathbf{19,6\ N}$.
Un oggetto di 3,00 kg occupa lo stesso volume di 2,00 kg di acqua, perciò l'oggetto ha una densità maggiore dell'acqua. Una volta lasciato libero nell'acqua, l'oggetto **precipita**.

b. In riferimento alla figura 7, metti in ordine, dalla più piccola alla più grande, i tre oggetti, in base alla loro densità.

Considerando il rapporto tra il volume emerso e il volume totale dell'oggetto, possiamo notare che:

$$\left(\frac{V_i}{V_T}\right)_B < \left(\frac{V_i}{V_T}\right)_A < \left(\frac{V_i}{V_T}\right)_C$$

Siccome il volume immerso è pari al volume del fluido spostato e la spinta di Archimede è data dal peso del fluido spostato, e visto che i solidi sono in equilibrio, sappiamo che: $F_A = P \quad \Rightarrow \quad dV_i g = d_{ogg} V_T g \quad \Rightarrow \quad \frac{V_i}{V_T} = \frac{d_{ogg}}{d}$. Quindi:

$$\frac{d_B}{d} < \frac{d_A}{d} < \frac{d_C}{d} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{d_B < d_A < d_C}$$