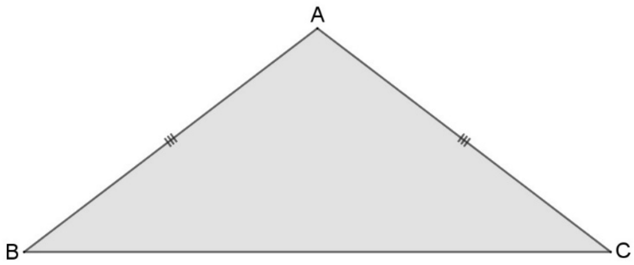
1. Enuncia e dimostra il teorema del triangolo isoscele.

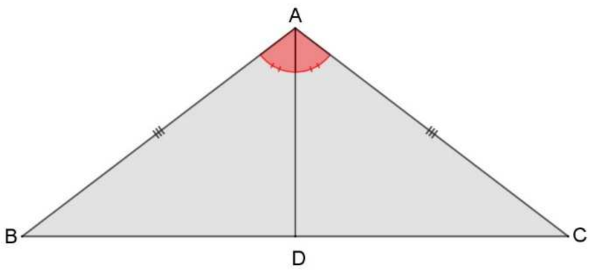
Se un triangolo è isoscele, allora ha due angoli congruenti:




Ipotesi:
ABC triangolo
$AB \cong CA$

Tesi:
$A\hat{B}C \cong B\hat{C}A$

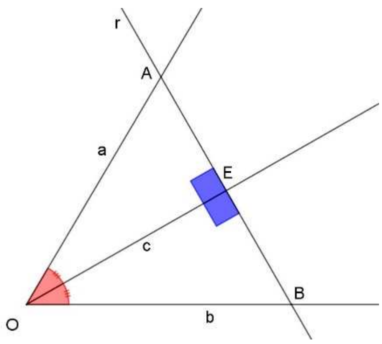
Dimostrazione:
Traccio la bisettrice dell'angolo al vertice, che interseca la base BC nel punto D.
Considero i triangoli ABD e ADC. Essi hanno:
$AB \cong AC$ per ipotesi
$AD$ in comune
$B\hat{A}D \cong D\hat{A}C$ per costruzione




$ABD \cong ADC$ per il primo criterio di congruenza dei triangoli.
Di conseguenza: $A\hat{B}C \cong B\hat{C}A$ perché elementi corrispondenti in triangoli congruenti.

**c.v.d.**

2. Sulla bisettrice $Oc$ dell'angolo acuto $a\hat{O}b$ scegli un punto $E$. Traccia poi la retta per $E$, che formi con la bisettrice stessa quattro angoli retti e intersechi i lati dell'angolo nei punti $A$ e $B$. Dimostra che $OA \cong OB$.




Ipotesi:
$a\hat{O}b < 90°$
$a\hat{O}c \cong c\hat{O}b$
$Oc \cap r = \{E\}$
$r \perp OE$
$r \cap Oa = \{A\}$; $r \cap Ob = \{B\}$

Tesi:
$OA \cong OB$

Dimostrazione:

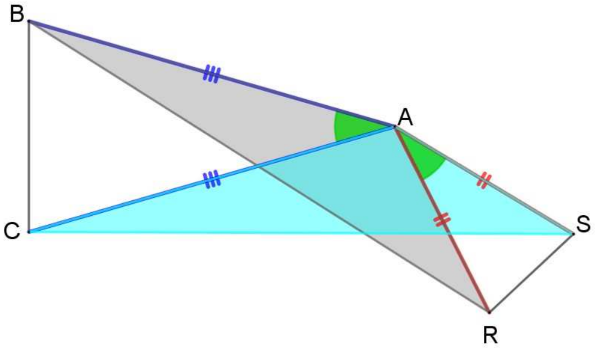
Considero i triangoli $AOE$ e $BOE$. Essi hanno:
$OE$ in comune
$E\hat{O}B \cong E\hat{O}A$ per ipotesi
$B\hat{E}O \cong O\hat{E}A$ perché entrambi retti per ipotesi

Di conseguenza $AOE \cong BOE$ per il secondo criterio di congruenza dei triangoli.

Quindi $OA \cong OB$ perché elementi corrispondenti in triangoli congruenti.

**c.v.d.**

3. Disegna due triangoli isosceli $ABC$ e $ARS$ di basi $BC$ e $SR$, aventi in comune il solo vertice $A$ e con $B\hat{A}C \cong R\hat{A}S$. Dimostra che i triangoli $ABR$ e $ACS$ sono congruenti se $A$, $B$, $R$ non sono allineati.




Ipotesi:
$ABC$ e $ARS$ triangoli
$AB \cong AC$
$AR \cong AS$
$B\hat{A}C \cong R\hat{A}S$
$A$, $B$, $R$ non allineati

Tesi:
$ABR \cong ACS$

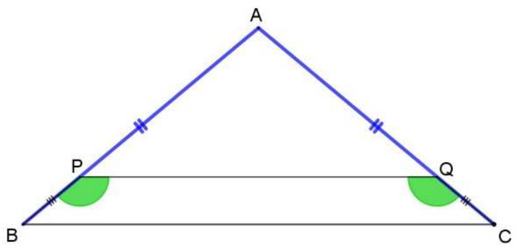
Dimostrazione:

Considero i triangoli $ABR$ e $ACS$. Essi hanno:
$AR \cong AS$ per ipotesi
$AB \cong AC$ per ipotesi
$B\hat{A}R \cong C\hat{A}S$ perché somma di angoli congruenti, infatti: $B\hat{A}R \cong B\hat{A}C + C\hat{A}R$ e $C\hat{A}S \cong C\hat{A}R + R\hat{A}S$, dove $C\hat{A}R$ in comune e $B\hat{A}C \cong R\hat{A}S$ per ipotesi

Di conseguenza $ABR \cong ACS$ per il primo criterio di congruenza dei triangoli.

**c.v.d.**

4. Sui lati obliqui $AB$ e $AC$ del triangolo isoscele $ABC$, considera rispettivamente due punti $P$ e $Q$ tali che $BP \cong CQ$. Dimostra che $B\hat{P}Q \cong P\hat{Q}C$.




Ipotesi:
$ABC$ triangolo
$AB \cong AC$
$P \in AB, Q \in AC$
$BP \cong CQ$

Tesi:
$B\hat{P}Q \cong P\hat{Q}C$

Dimostrazione:
$AP \cong AQ$ perché differenza di segmenti congruenti, infatti: $AP \cong AB - PB \cong AC - CQ \cong AQ$
Di conseguenza il triangolo APQ è isoscele e, per la proprietà dei triangoli isosceli: $A\hat{P}Q \cong P\hat{Q}A$.
Ne possiamo dedurre la tesi, visto che gli angoli di cui dobbiamo dimostrare la congruenza sono adiacenti ai due angoli precedenti.

**c.v.d.**