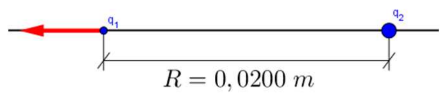
1. Siano date due cariche poste sul semiasse positivo delle x: la carica $q_1 = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\,C$ nell'origine e la carica $q_2 = 3{,}20 \cdot 10^{-19}\,C$ a una distanza $R = 0{,}0200\,m$ dalla prima.
   A. Calcola l'intensità e la direzione della forza elettrostatica $\vec{F}_{12}$ esercitata sulla particella 1 dalla particella 2, determinandone modulo, direzione e verso.
   B. Dopo aver aggiunto, sull'asse x tra le due cariche, una terza particella q_3, di carica uguale e opposta a q_2, a distanza $\frac{3}{4}R$ dalla prima particella, calcola la forza elettrostatica $\vec{F}_1$ agente sulla particella 1 per opera delle altre due, determinandone modulo, direzione e verso.
   C. Spostiamo la particella q_3, mantenendola a una distanza di $\frac{3}{4}R$ da q_1, di un angolo di 60° in verso antiorario. Calcola la forza elettrostatica $\vec{F}_1$ agente sulla particella 1 per opera delle altre due, determinandone modulo, direzione e verso.

$$q_1 = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\,C \qquad q_2 = 3{,}20 \cdot 10^{-19}\,C \qquad R = 0{,}0200\,m \qquad \vec{F}_{12}?$$

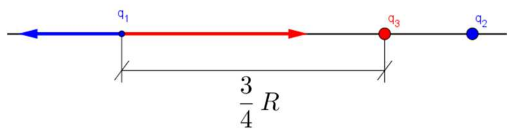
A. La forza esercitata sulla particella 1 dalla particella 2 ha per direzione l'asse x e verso opposto all'asse x, perché essendo entrambe le cariche positive, la forza è repulsiva. L'intensità della forza è data dalla legge di Coulomb:



$$F_{12} = k\frac{q_1 q_2}{R^2} = \mathbf{1{,}15 \cdot 10^{-24}\,N}$$

$$q_3 = -3{,}20 \cdot 10^{-19}\,C \qquad R_{13} = \frac{3}{4}R \qquad \vec{F}_1?$$

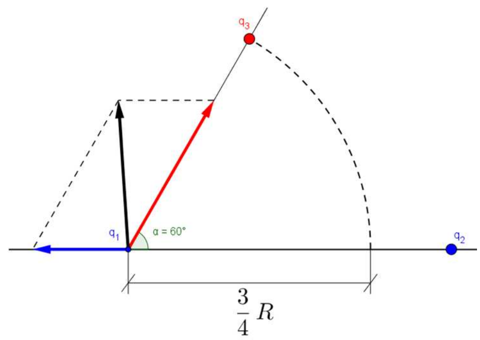
B. La forza esercitata sulla particella 1 dalla particella 2 ha per direzione l'asse x e verso opposto all'asse x, perché essendo entrambe le cariche positive, la forza è repulsiva. La forza esercitata sulla particella 1 dalla particella 3 ha per direzione e verso quelli dell'asse x, perché essendo le cariche opposte, la forza è attrattiva. L'intensità della forza è data dalla legge di Coulomb e dobbiamo fare la differenza tra i moduli delle due. La forza risultante ha direzione e verso dell'asse x:



$$F_1 = k\frac{q_1 q_3}{\left(\frac{3}{4}R\right)^2} - k\frac{q_1 q_2}{R^2} = \mathbf{8{,}95 \cdot 10^{-25}\,N}$$

$$q_3 = -3{,}20 \cdot 10^{-19}\,C \qquad R_{13} = \frac{3}{4}R \qquad \vec{F}_1?$$

C. Ho risolto graficamente il problema. Per poter risolvere algebricamente il problema, devo scomporre la forza agente per effetto della carica q_3 e fare la differenza tra la sua componente orizzontale e la forza agente per effetto della carica q_2. La componente verticale, invece, è quella della forza della carica q_3. Applico poi il teorema di Pitagora per determinare il modulo della forza (indicata in nero nel grafico) e determino l'angolo ϑ che forma con la direzione positiva dell'asse x.



$$F_{12_x} = -k\frac{q_1 q_2}{R^2}$$

$$F_{13_x} = k\frac{q_1 q_3}{\left(\frac{3}{4}R\right)^2}\cos 60° = \frac{8}{9}\,k\frac{q_1 q_3}{R^2} \qquad F_{13_y} = k\frac{q_1 q_3}{\left(\frac{3}{4}R\right)^2}\sin 60° = \frac{8\sqrt{3}}{9}\,k\frac{q_1 q_3}{R^2}$$

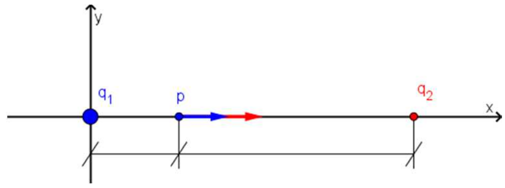
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{\left(F_{12_x} + F_{13_x}\right)^2 + F_{13_y}^2} = k\frac{q_1}{R^2}\sqrt{\left(-q_2 + \frac{8}{9}q_3\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\sqrt{3}\,q_3\right)^2} = \mathbf{1{,}78 \cdot 10^{-24}\,N}$$

$$\vartheta = arc\tan\frac{F_y}{F_x} = arc\tan\frac{\frac{8}{9}\sqrt{3}\,k\frac{q_1 q_3}{R^2}}{k\frac{q_1}{R^2}\left(\frac{8}{9}q_3 - q_2\right)} = -85{,}9° + 180° = \mathbf{94{,}1°}$$

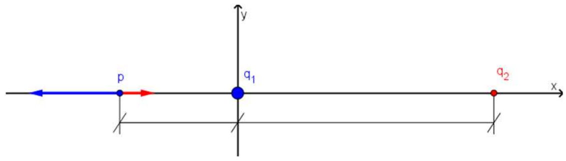
2. Siano date una carica $q_1 = +8q$ posta nell'origine e una carica $q_2 = -2q$ sul semiasse positivo delle x, a una distanza L da q_1. In che punto (a distanza finita) si può collocare un protone in modo che resti in equilibrio?

$$q_1 = +8q \qquad q_2 = -2q \qquad d(q_1, q_2) = L \qquad q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C \qquad v?$$

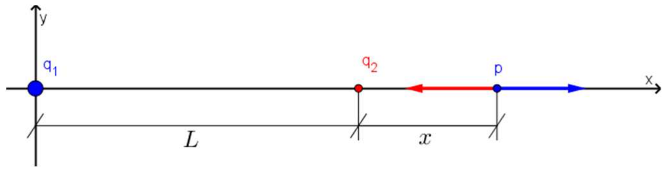
Se il protone si trovasse tra le due cariche, le forze agenti su di esso avrebbero lo stesso verso (ovvero il verso positivo dell'asse x) e quindi non si annullerebbero.
Per questo motivo, il protone non può stare in equilibrio.



Se il protone si trovasse più vicino alla carica maggiore in valore assoluto, ovvero quella positiva, subirebbe una forza di repulsione maggiore rispetto a quella di attrazione che subirebbe per effetto della carica negativa.
Per questo motivo, in questa posizione il protone non può stare in equilibrio.



L'unica situazione possibile è quella in cui il protone si trova più vicino alla carica negativa, che ha, in valore assoluto, la carica minore.
Possiamo determinare la distanza x dalla carica q_2, ponendo uguali, in modulo, le due forze agenti sul protone per effetto delle due cariche:



$$F_1 = F_2 \quad \Rightarrow \quad k\frac{q_1 p}{(L+x)^2} = k\frac{q_2 p}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{8q}{(L+x)^2} = \frac{2q}{x^2} \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = (L+x)^2 \quad \Rightarrow \quad 2x = L + x \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = L}$$

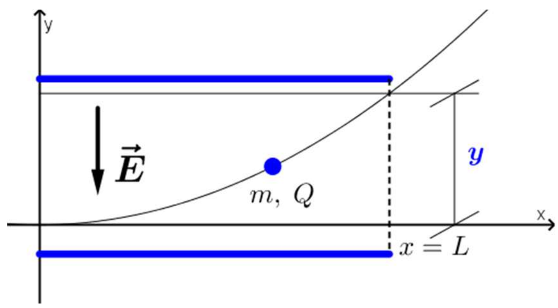
3. La figura 1 mostra i piatti di deflessione di una stampante a getto d'inchiostro. Una goccia d'inchiostro con una massa pari a $1{,}3 \cdot 10^{-10}\ kg$ e con una carica negativa di modulo $1{,}5 \cdot 10^{-13} C$ penetra tra i piatti di deflessione, inizialmente muovendosi lungo l'asse x, con una velocità $v_x = 18\ m/s$. La lunghezza L di questi piatti è 1,6 cm. I piatti sono carichi e producono un campo elettrico in tutta la regione interposta. Si supponga che il campo elettrico E rivolto verso il basso sia uniforme e abbia un'intensità di $1{,}4 \cdot 10^6\ N/C$. Qual è la deflessione verticale della goccia in corrispondenza dell'estremo di destra dei piatti? (Si tenga presente che la forza di gravità sulla goccia è piccola in rapporto alla forza elettrostatica agente su di essa e può essere trascurata).

$$m = 1{,}3 \cdot 10^{-10}\ kg \qquad q = -1{,}5 \cdot 10^{-13}\ C \qquad v_x = 18\ m/s \qquad L = 1{,}6\ cm \qquad E = 1{,}4 \cdot 10^6\ N/C \qquad y?$$

La carica è negativa, perciò subisce una forza elettrica rivolta verso l'alto, quindi è sottoposta a un'accelerazione verso l'alto, di modulo:

$$F = ma = QE - mg \quad \Rightarrow \quad a = \frac{QE}{m} - g$$

Allo stesso tempo, la carica ha cominciato a muoversi, lungo l'asse x, con una velocità orizzontale costante, che mantiene.
Componendo i due moti, ne risulta un moto parabolico:

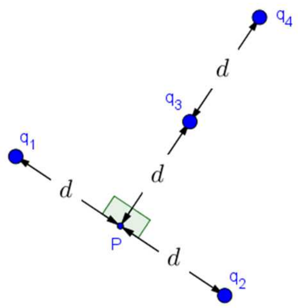


$$\begin{cases} x = v_x t \\ y = \dfrac{1}{2}at^2 \end{cases} \qquad t = \frac{L}{v_x} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}a\left(\frac{L}{v_x}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{QE}{m} - g\right)\left(\frac{L}{v_x}\right)^2 = 6{,}3 \cdot 10^{-4}\ m = \boldsymbol{0{,}63\ mm}$$

4. Qual è il modulo del campo elettrico nel punto P della figura 2 generato dalle quattro cariche puntiformi mostrate? La distanza d è di $5{,}0\ \mu m$ e $q_1 = q_2 = +5e$, $q_3 = +3e$, $q_4 = -12\ e$.

$$q_1 = q_2 = +5e \qquad q_3 = +3e \qquad q_4 = -12\ e \qquad d = 5{,}0\ \mu m \qquad E_P?$$

Il campo elettrico generato in P dalle cariche q_1 e q_2, uguali tra loro e alla stessa distanza da P, è nullo, in quanto somma di due campi, E_1 ed E_2, di ugual modulo ma di verso opposto.
Resta solo il campo elettrico generato da q_3 e q_4: i moduli dei due campi hanno verso opposto, visto che le due cariche generatrici hanno segno opposto, e possiamo dimostrare facilmente che sono uguali, ricavandone una differenza nulla:

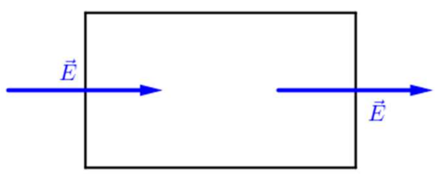


$$E_4 - E_3 = k\frac{q_4}{(2d)^2} - k\frac{q_3}{d^2} = \frac{k}{d^2}\left(\frac{q_4}{4} - q_3\right) = \frac{k}{d^2}\left(\frac{12e}{4} - 3e\right) = 0\ N/C$$

Per questo motivo, il campo elettrico totale agente in P è **nullo**.

5. Sia data una superficie gaussiana a forma di cilindro di raggio R, che giace in un campo elettrico uniforme E parallelo all'asse del cilindro. Quanto vale il flusso elettrico netto Φ attraverso il cilindro?

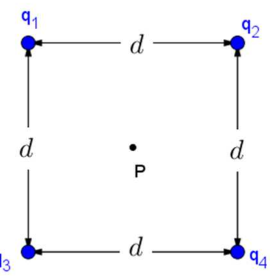
Come si vede dallo schema a lato, il campo elettrico entra perpendicolarmente alla base nel cilindro ed esce, sempre perpendicolarmente, dalla base opposta. Inoltre è parallelo rispetto alla superficie laterale: nel caso della superficie laterale, il prodotto scalare tra campo elettrico e vettore superficie è nullo, in quanto sono perpendicolari. Nel caso delle superfici di base, i due risultati hanno valori opposti e quindi, sommando, otteniamo come risultato che il **flusso è nullo**.



6. Si calcoli il potenziale nel punto P, al centro del quadrato di cariche puntiformi mostrate nella figura 3. Si assuma che sia $d = 1{,}3\ m$ e che le cariche siano $q_1 = +12\ nC$, $q_2 = -24\ nC$, $q_3 = +31\ nC$, $q_4 = +17\ nC$.

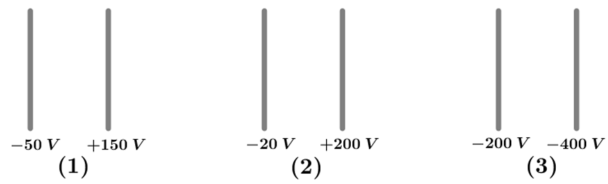
$$d = 1{,}3\ m \qquad q_1 = +12\ nC \qquad q_2 = -24\ nC \qquad q_3 = +31\ nC \qquad q_4 = +17\ nC \qquad V?$$

Determino il potenziale come somma algebrica dei potenziali dovuti alle singole cariche (prese con il loro segno), tenendo presente che la distanza di P da ogni carica è metà della diagonale del quadrato, ovvero: $L = d\frac{\sqrt{2}}{2}$:



$$V = k\frac{q_1}{L} + k\frac{q_2}{L} + k\frac{q_3}{L} + k\frac{q_4}{L} = k\frac{\sqrt{2}}{d}\,(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) = \mathbf{3{,}5 \cdot 10^2\ V}$$

7. La figura 4 mostra tre coppie di piatti paralleli posti alla medesima distanza, con indicati i potenziali di ciascun piatto. Il campo elettrico tra i piatti è uniforme e perpendicolare ad essi.
   A. Ordina le coppie secondo i valori decrescenti di modulo del campo elettrico tra i piatti.
   B. In quale caso il campo elettrico è orientato verso destra?
   C. Se lasciamo libero un elettrone a metà tra i piatti di destra, questo rimane dov'è, si muove verso destra a velocità costante, si muove verso sinistra a velocità costante, accelera verso destra o accelera verso sinistra?



A. Il modulo del campo elettrico è dato dal rapporto tra la differenza di potenziale tra i due piatti e la distanza d tra i piatti (uguale per tutti e tre i condensatori considerati), perciò:

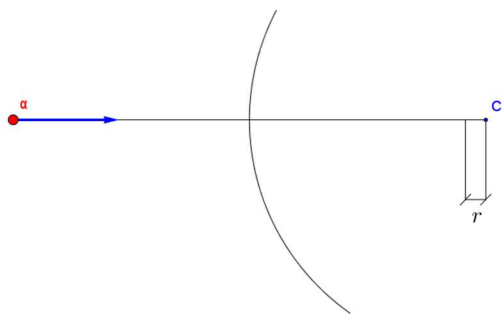
$$E_1 = \frac{200}{d} \qquad E_2 = \frac{220}{d} \qquad E_3 = \frac{200}{d}$$

Perciò l'ordine decrescente è $\boldsymbol{E_2}$ seguito da $\boldsymbol{E_1 = E_3}$.

B. È orientato verso destra solo nel **terzo caso**.

C. L'elettrone sarà sottoposto a una forza elettrica di verso opposto rispetto al campo elettrico, perciò rivolta verso sinistra. Visto che è sottoposto a una forza, allora ci sarà l'azione di un'accelerazione. L'elettrone si muoverà **accelerando verso sinistra**.

8. Una particella alfa (costituita da due protoni e due neutroni) è in moto verso un atomo d'oro (il cui nucleo è composto da 79 protoni e 118 neutroni) in direzione del suo centro e attraversa la nube elettronica che circonda il nucleo. La particella α rallenta finché si arresta a una distanza $r = 9{,}23\ fm$ dal centro del nucleo, per poi rimbalzare indietro lungo lo stesso cammino d'avvicinamento. Avendo il nucleo d'oro una massa molto maggiore della particella α, trascuriamo il movimento del nucleo. Qual era l'energia cinetica iniziale K_i della particella quando si trovava lontana, cioè al di fuori dell'influenza del nucleo atomico? Si assuma che l'unica forza agente tra la particella α e il nucleo d'oro sia la forza elettrostatica.



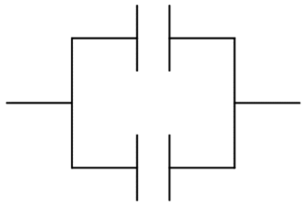
Possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia, considerando come posizione iniziale quella all'infinito e come posizione finale quella a una distanza r dal centro. L'energia potenziale iniziale è nulla, mentre nel caso finale, visto che la particella rallenta fino a fermarsi, ad essere nulla è l'energia cinetica. Perciò:

$$U_i + K_i = U_f + K_f \qquad \Rightarrow \qquad K_i = U_f$$

L'energia potenziale finale è l'energia potenziale elettrica dell'atomo d'oro (costituito da 79 protoni e 118 neutroni, ma ai fini della carica, ciò che conta davvero sono solo i 79 protoni), rispetto alla particella α, che è costituita da due protoni e due neutroni e, quindi, ai fini della carica, conto solo i due protoni:

$$U_f = k\frac{79\ e^+ \cdot 2\ e^+}{r} = K_i = \boldsymbol{3{,}94 \cdot 10^{-12}\ J}$$

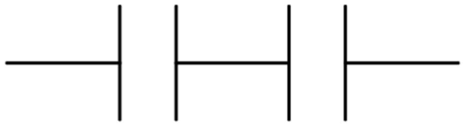
9. Una batteria di tensione V immagazzina una carica q su un gruppo di due condensatori uguali. Quali sono la differenza di potenziale e la carica su ciascun condensatore se essi sono collegati in parallelo o in serie?



Nel caso del collegamento in parallelo, i due condensatori hanno la stessa differenza di potenziale, che è uguale a quella di partenza, **V**. Per quanto riguarda la carica, considerando che la capacità equivalente è pari alla somma delle due capacità, cioè è $2C$, allora:

$$C_{eq} = \frac{q}{V} \quad \Rightarrow \quad 2C = \frac{q}{V} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{q}{2V} = \frac{\frac{q}{2}}{V}$$

La carica sul singolo condensatore è pari a $\boldsymbol{\frac{q}{2}}$.



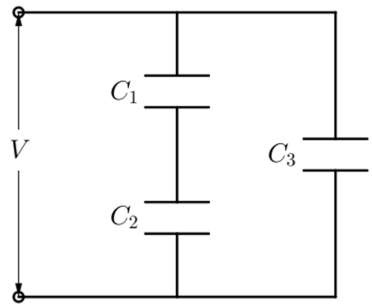
Nel caso del collegamento in serie, i due condensatori hanno la stessa carica, che è uguale a quella di partenza, **q**. Per quanto riguarda la differenza di potenziale, considerando che la capacità equivalente è pari al reciproco della somma dei reciproci delle due capacità, cioè è $\frac{C}{2}$, allora:

$$C_{eq} = \frac{q}{V} \quad \Rightarrow \quad \frac{C}{2} = \frac{q}{V} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{2q}{V} = \frac{q}{\frac{V}{2}}$$

La differenza di potenziale sul singolo condensatore è pari a $\boldsymbol{\frac{V}{2}}$.

10. Sapendo che la capacità equivalente dell'insieme dei condensatori di figura 5 è $7{,}34\ \mu F$, si assuma $C_2 = 5{,}00\ \mu F$ e $C_3 = 4{,}00\ \mu F$. Si determini la capacità del condensatore C_1.

$$C_{eq} = 7{,}34\ \mu F \qquad C_2 = 5{,}00\ \mu F \qquad C_3 = 4{,}00\ \mu F \qquad C_1?$$



Considero innanzi tutto i due condensatori C_1 e C_2, collegati in serie, perciò:

$$C_{12} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1}$$

Poi considero il condensatore equivalente ai primi due condensatori e questo è collegato in parallelo al terzo condensatore, perciò la capacità equivalente è data dalla somma delle due capacità:

$$C_{eq} = C_{12} + C_3 = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} + C_3$$

$$\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = C_{eq} - C_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \left(C_{eq} - C_3\right)^{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C_1} = \left(C_{eq} - C_3\right)^{-1} - \frac{1}{C_2} \quad \Rightarrow$$

$$C_1 = \left(\left(C_{eq} - C_3\right)^{-1} - \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \mathbf{10{,}1\ \mu F}$$