1. $2x^3 + 7x^2 + 8x + 3 = 0$

Applicando il teorema del resto, verifico che: $P(-1) = -2 + 7 - 8 + 3 = 0$, perciò, applicando la regola di Ruffini:

	2	7	8	3
-1		-2	-5	-3
	2	5	3	0

A questo punto, l'equazione da risolvere è:

$$(x+1)(2x^2 + 5x + 3) = 0 \qquad x_{2,3} = \frac{-5 \pm 1}{4} = \left\langle \begin{array}{l} -\frac{3}{2} \\ -1 \end{array} \right.$$

Le soluzioni sono: $\boldsymbol{x_{1,2} = -1, x_3 = -\frac{3}{2}}$.

2. $\sqrt{x+1} = x - 1$

Elevo a quadrato entrambi i membri e risolvo l'equazione. Al termine, verifico se il risultato è accettabile, sostituendolo nel testo:

$$x + 1 = x^2 - 2x + 1 \qquad x^2 - 3x = 0 \qquad x(x-3) = 0 \qquad \begin{array}{ll} x_1 = 0 & non\ acc. \\ \boldsymbol{x_2 = 3} & acc. \end{array}$$

3. $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x^2 + y^2 = 2x - 2y \end{cases}$

Ricavo la y nella prima equazione, $y = 2x - 4$ e risolvo l'equazione di secondo grado che ottengo dalla seconda equazione sostituendovi la y in funzione della x:

$$x^2 + (2x-4)^2 = 2x - 2(2x-4) \qquad x^2 + 4x^2 - 16x + 16 = 2x - 4x + 8$$

$$5x^2 - 14\,x + 8 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{7 \pm 3}{5} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ \frac{4}{5} \end{array} \right.$$

$$\boldsymbol{\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = -\frac{12}{5} \end{cases}}$$

4. $|5 - x| - 6x + 1 > |2x - 10|$

Considerando che $5 - x = -(x-5)$ e che $2x - 10 = 2(x-5)$, si presentano solo due casi:

$$\begin{cases} x \geq 5 \\ -5 + x - 6x + 1 > 2x - 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 5 \\ -7x > -6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 5 \\ x < \frac{6}{7} \end{cases} \qquad imp.$$

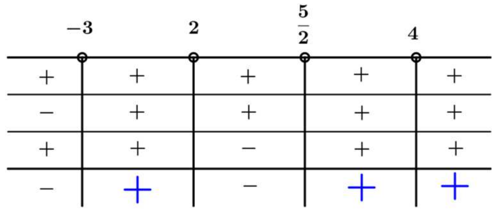
$$\begin{cases} x < 5 \\ 5 - x - 6x + 1 > -2x + 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 5 \\ -5x > 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 5 \\ x < -\frac{4}{5} \end{cases} \qquad \boldsymbol{x < -\frac{4}{5}}$$

5. $\frac{(x-4)^2(x+3)}{2x^2-9x+10} > 0$

$N_1 > 0$: $(x-4)^2 > 0$ $\quad x \neq 4$

$N_2 > 0$: $x + 3 > 0$ $\quad x > -3$

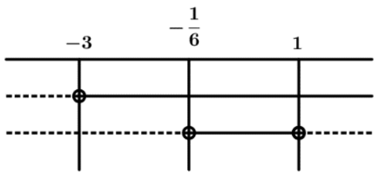
$D > 0$: $2x^2 - 9x + 10 > 0$ $\quad x_{1,2} = \frac{9 \pm 1}{4}$ $\quad x < 2 \;\vee\; x > \frac{5}{2}$



$$\boldsymbol{-3 < x < 2 \quad \vee \quad \frac{5}{2} < x < 4 \quad \vee \quad x > 4}$$

6. $\begin{cases} \frac{3x+1}{4} > -2 \\ \frac{6x+1}{6}(1-x) > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x + 1 > -8 \\ (6x+1)(1-x) > 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x > -3 \\ -\frac{1}{6} < x < 1 \end{cases}$



$$\boldsymbol{-\frac{1}{6} < x < 1}$$

7. Scegli la risposta corretta tra quelle proposte:

Si considerino i due numeri $x = \left(\sqrt{3}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ e $y = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$. Si ha che:

Ⓐ $x = y$ Ⓑ $x > y$ Ⓒ $x < y$ Ⓓ $x^2 - y^2 > 1$ Ⓔ x ed y non si possono confrontare

Giochi di Archimede, 1998, triennio

$$x = (\sqrt{3})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{3})^2 = 3 \qquad y = (\sqrt{2})^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$$

Siano x e y due numeri reali tali che $x > y$. Quali delle seguenti disuguaglianze è sempre verificata?

Ⓐ $x^2 > xy$ Ⓑ $x^2 > y^2$ Ⓒ $x/y > 1$ Ⓓ $x^3 > y^3$ Ⓔ $x^4 > y^4$

Giochi di Archimede, 1999, triennio

La somma dei reciproci delle radici di $ax^2 + bx + c = 0$ (ove $a, b, c \neq 0$) è:

Ⓐ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ Ⓑ $\frac{b}{c}$ Ⓒ $-\frac{c}{b}$ Ⓓ $-\frac{a}{b}$ Ⓔ $-\frac{b}{c}$

Giochi di Archimede, 1996, triennio

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}$$

Scrivendo per esteso il numero intero $(10^{2018} + 2018)^2$ si utilizzano 4037 cifre. Qual è la somma di tutte queste cifre?

Ⓐ 36 Ⓑ 31 Ⓒ 42 Ⓓ 51 Ⓔ 43

Giochi di Archimede, 2018, triennio

$$(10^{2018} + 2018)^2 = 10^{4036} + 4036 \cdot 10^{2018} + 2018^2 = 10^{4036} + 4036 \cdot 10^{2018} + 4072324$$

La somma delle cifre è:

$$1 + 4 + 0 + 3 + 6 + 4 + 0 + 7 + 2 + 3 + 2 + 4 = 36$$

8. Uno studente ha avuto una media di 6,5 nei primi quattro compiti. Quale voto deve prendere nel quinto per ottenere la media del 7?

Giochi di Archimede, 1997, biennio

Sia x il voto che lo studente deve prendere nel quinto compito:

$$\frac{6{,}5 \cdot 4 + x}{5} = 7 \qquad 26 + x = 35 \qquad x = \mathbf{9}$$

9. Oggi, Angelo ha un quarto dell'età di sua madre. Quando avrà 18 anni, sua madre avrà il triplo della sua età. Quanti anni ha attualmente Angelo?

Giochi d'Autunno, 2010

Quando Angelo avrà 18 anni, sua mamma ne avrà 54. La differenza d'età tra i due è quindi di 36 anni. Perciò se indico con x l'età di Angelo oggi, quella della madre la posso indicare sia come $4x$ sia come $x + 36$:

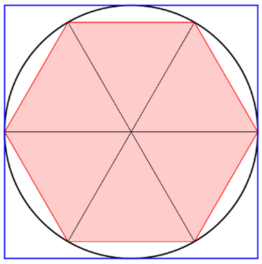
$$4x = x + 36 \qquad x = 12$$

Angelo ha **12** anni.

10. Si consideri un quadrato di lato unitario; inscriviamo al suo interno una circonferenza e, all'interno di questa, un esagono regolare. Quanto misura il lato dell'esagono?

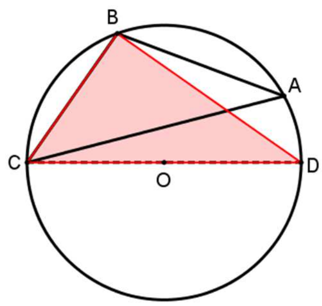
Giochi di Archimede, 1998, biennio

Se il quadrato ha lato unitario, la circonferenza inscritta ha diametro pari al lato del quadrato e quindi raggio pari a 0,5. Un esagono inscritto in una circonferenza ha lato uguale al raggio della circonferenza, perciò il lato dell'esagono misura **0,5**.



11. Supponiamo che, nel cerchio in figura 1, l'angolo $B\hat{A}C$ sia di 35°. Sia CD il diametro passante per C, quanto vale $B\hat{C}D$?

Giochi di Archimede, 1998, triennio



$$B\hat{A}C \cong B\hat{D}C$$

perché angoli alla circonferenza sottesi dalla stessa corda BC.

Consideriamo il triangolo DBC. Avendo un lato coincidente con il diametro, il triangolo è retto in B. Riassumendo:

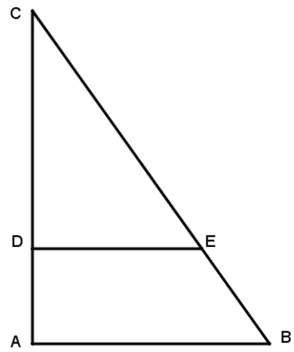
$$B\hat{D}C = 35° \qquad C\hat{B}D = 90°$$

Dato che la somma degli angoli interni di un triangolo è di 180°, per differenza:

$$B\hat{C}D = 180° - 35° - 90° = \mathbf{55°}$$

12. Nella figura 2, il segmento DE è parallelo ad AB. Sapendo che l'area di DEC è uguale ai $\frac{3}{4}$ di quella di ABC e che AC misura 1 m, quanto misura DC?

Giochi di Archimede, 2006, biennio



I triangoli ABC e DEC sono simili, in quanto hanno tutti gli angoli congruenti: l'angolo in C è in comune e, essendo i lati DE e AB paralleli, gli altri angoli sono congruenti in quanto corrispondenti in rette parallele tagliate da una trasversale.
Perciò i lati sono in proporzione:

$$\overline{AC}:\overline{CD} = \overline{AB}:\overline{DE} \quad \Rightarrow \quad \overline{DE} = \frac{\overline{CD}\cdot\overline{AB}}{\overline{AC}} = \overline{CD}\cdot\overline{AB}$$

I triangoli sono entrambi rettangoli e l'area si calcola facendo il semiprodotto dei cateti:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\,\overline{AB}\cdot\overline{AC} \qquad A_{DEC} = \frac{1}{2}\,\overline{DE}\cdot\overline{CD}$$

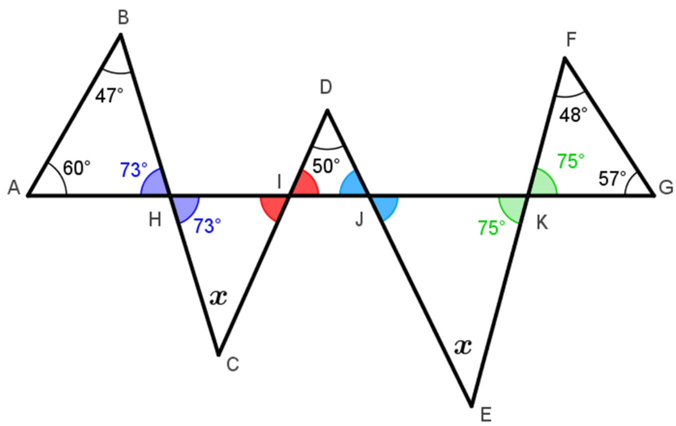
Sapendo che l'area di DEC è ¾ dell'area di ABC:

$$\frac{1}{2}\,\overline{DE}\cdot\overline{CD} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\,\overline{AB}\cdot\overline{AC} \quad \Rightarrow \quad \overline{CD}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CD} = \frac{3}{4}\overline{AB}\cdot\overline{AC} \quad \Rightarrow \quad \overline{CD}^2 = \frac{3}{4}\overline{AC} \quad \Rightarrow \quad \overline{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\overline{AC}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

13. Nella figura 3, sono indicate le ampiezze degli angoli di vertici A, B, D, F, G. Gli angoli di vertici C ed E hanno la stessa ampiezza, indicata con x. Qual è il valore di tale ampiezza x?

Giochi di Archimede, 2018, biennio

Nell'immagine sono stati indicati con lo stesso colore gli angoli congruenti. Dato che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°, possiamo ricavare:



$$A\widehat{H}B \cong C\widehat{H}I = 180° - 60° - 47° = 73°$$

$$F\widehat{K}G \cong E\widehat{K}J = 180° - 48° - 57° = 75°$$

Indicando gli angoli rimanenti con delle incognite, abbiamo:

$$C\widehat{I}H \cong J\widehat{I}D = y$$

$$D\widehat{J}I \cong K\widehat{J}E = z$$

Per tutti e tre i triangoli, HCI, DIJ e JEK, la somma degli angoli interni è di 180°, perciò:

$$\begin{cases} x + y + 73° = 180° \\ y + z + 50° = 180° \\ x + z + 75° = 180° \end{cases}$$

Sommando la prima e la terza equazione e sottraendo la seconda, membro a membro, otteniamo:

$$x + y + 73° - y - z - 50° + x + z + 75° = 180° - 180° + 180°$$

$$2x + 98° = 180° \quad \Rightarrow \quad x + 49° = 90° \quad \Rightarrow \quad x = \mathbf{41°}$$