1. Determina per quali valori del parametro reale k l'equazione rappresenta:
   a) una circonferenza; b) un'iperbole; c) una parabola con asse parallelo agli assi coordinati; d) un'ellisse.

$$(k-4)x^2+ky^2+6x+4y-2=0$$

A. Perché l'equazione rappresenti una circonferenza, i due coefficienti dei termini di secondo grado devono essere uguali:

$$k-4=k \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\nexists k \in \mathbb{R}}$$

B. Perché l'equazione rappresenti un'iperbole, i due coefficienti dei termini di secondo grado devono essere discordi:

$$k\,(k-4)<0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{0<k<4}$$

C. Perché l'equazione rappresenti una parabola con asse parallelo all'asse y, il coefficiente del termine di secondo grado in y deve essere nullo; perché l'equazione rappresenti una parabola con asse parallelo all'asse x, il coefficiente del termine di secondo grado in x deve essere nullo, perciò:

$$\boldsymbol{k=0} \quad \vee \quad \boldsymbol{k=4}$$

D. Perché l'equazione rappresenti un'ellisse, i coefficienti dei termini di secondo grado e il coefficiente s devono essere concordi. Cominciamo con il determinare l'equazione canonica dell'ellisse, con il completamento del quadrato:

$$(k-4)\left(x^2+\frac{6}{k-4}x+\frac{9}{(k-4)^2}\right)+k\left(y^2+\frac{4}{k}y+\frac{4}{k^2}\right)=2+\frac{9}{k-4}+\frac{4}{k}$$

Ora abbiamo il coefficiente s che è il secondo membro dell'equazione:

$$\begin{cases} k-4>0 \\ k>0 \\ 2+\dfrac{9}{k-4}+\dfrac{4}{k}\geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} k-4<0 \\ k<0 \\ 2+\dfrac{9}{k-4}+\dfrac{4}{k}\leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k>4 \\ k>0 \\ 2k^2-8k+9k+4k-16\geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} k<4 \\ k<0 \\ 2k^2-8k+9k+4k-16\leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k>4 \\ k>0 \\ 2k^2+5k-16\geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} k<4 \\ k<0 \\ 2k^2+5k-16\leq 0 \end{cases}$$

$$k_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+128}}{4}$$

$$\begin{cases} k>4 \\ k>0 \\ k\leq\dfrac{-5-\sqrt{153}}{4} \quad \vee \quad k\geq\dfrac{-5+\sqrt{153}}{4} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} k<4 \\ k<0 \\ \dfrac{-5-\sqrt{153}}{4}\leq k\leq\dfrac{-5+\sqrt{153}}{4} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{k>4} \quad \vee \quad \boldsymbol{\frac{-5-\sqrt{153}}{4}\leq k<0}$$

2. Studia la seguente conica, determinandone il centro, i fuochi, gli eventuali asintoti e le direttrici:

$$16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 19 = 0$$

Riduco la conica a forma normale, con il metodo del completamento del quadrato:

$$16\,(x^2 - 4x + 4) - 9\,(y^2 + 2y + 1) = -19 + 64 - 9$$

$$16\,(x-2)^2 - 9\,(y+1)^2 = 36$$

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{9}{4}} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

Dall'equazione appena ottenuta, possiamo evincere il centro della conica, $\boldsymbol{O'(2;\ -1)}$ e notare che si tratta di un'iperbole con i fuochi su una retta parallela all'asse x.
Dai parametri:

$$a^2 = \frac{9}{4} \qquad b^2 = 4 \qquad c^2 = a^2 + b^2 = \frac{25}{4}$$

posso determinare le coordinate dei fuochi:

$$F_1\left(\frac{5}{2} + 2;\ -1\right) = \left(\boldsymbol{\frac{9}{2};\ -1}\right) \qquad F_2\left(-\frac{5}{2} + 2;\ -1\right) = \left(\boldsymbol{-\frac{1}{2};\ -1}\right)$$

Determino le equazioni degli asintoti:

$$y + 1 = \pm\frac{2}{\frac{3}{2}}\,(x-2) \quad \Rightarrow \quad y = \pm\frac{4}{3}\,(x-2) - 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c}\boldsymbol{4x - 3y - 11 = 0} \\ \boldsymbol{4x + 3y - 5 = 0}\end{array}$$

Determino le equazioni delle direttrici, che sono parallele all'asse y:

$$x = \pm\frac{\frac{9}{4}}{\frac{5}{2}} + 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c}\boldsymbol{x = \frac{29}{10}} \\ \boldsymbol{x = \frac{11}{10}}\end{array}$$

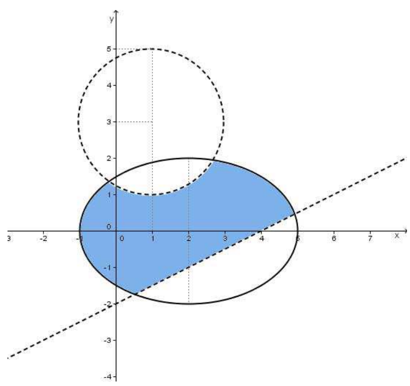
3. Scrivi un sistema di disequazioni che individui la regione di piano rappresentata in figura:

Determino innanzi tutto l'equazione della circonferenza di centro (1; 3) e raggio 2, come si evince dalla figura:

$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$

Siccome prendo solo i punti esterni, l'equazione diventa:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 > 0}$$



Determino l'equazione dell'ellisse di centro (2; 0) e semiassi 3 e 2:

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-0)^2}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 + 9y^2 - 16x - 20 = 0$$

Siccome prendo solo i punti interni, l'equazione diventa:

$$\boldsymbol{4x^2 + 9y^2 - 16x - 20 \le 0}$$

Infine considero la retta data e scelgo il semipiano superiore:

$$y = \frac{1}{2}x - 2 \quad \Rightarrow \quad x - 2y - 4 = 0$$

Sostituendo un punto, ottengo: $\boldsymbol{x - 2y - 4 < 0}$.
Mettendo a sistema le tre equazioni, posso concludere:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 > 0 \\ 4x^2 + 9y^2 - 16x - 20 \le 0 \\ x - 2y - 4 < 0 \end{cases}$$