1. Determina dominio, intersezioni con gli assi e segno delle seguenti funzioni e rappresenta i risultati in un piano cartesiano:

$$A.\quad y=\ln\frac{x}{x^2-4}-\ln x$$

Dominio:
Gli argomenti dei logaritmi devono essere positivi e il denominatore diverso da zero, perciò:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{x^2-4}>0\\ x>0\end{cases}\qquad \begin{matrix}N>0: x>0\\ D>0: x^2-4>0\end{matrix}$$

	-2		0		2	
$-$		$-$		$+$		$+$
$+$		$-$		$-$		$+$
$-$		$+$		$-$		$+$

Consideriamo i segni positivi come risultato della prima disequazione:

$$\begin{cases}-2<x<0 \quad \vee \quad x>2\\ x>0\end{cases}\qquad x>2$$

$$\boldsymbol{D=]2;\ +\infty[}$$

Intersezione con gli assi:
l'unica intersezione possibile è quella con l'asse x:

$$\begin{cases}y=\ln\dfrac{x}{x^2-4}-\ln x\\ y=0\end{cases}$$

Per semplificare i calcoli, scriviamo la funzione in modo diverso, applicando le proprietà dei logaritmi:

$$y=\ln x-\ln(x^2-4)-\ln x=-\ln(x^2-4)$$

$$\begin{cases}y=-\ln(x^2-4)\\ y=0\end{cases}\qquad \ln(x^2-4)=0 \qquad x^2-4=1$$

Soluzioni dell'equazione sono $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$, ma l'unica intersezione possibile è:

$$\boldsymbol{A\left(\sqrt{5};0\right)}$$

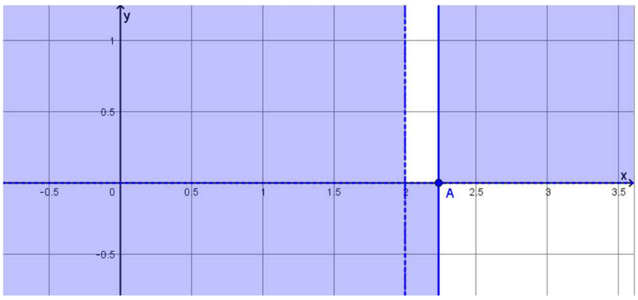
Segno della funzione:

$$\ln\frac{x}{x^2-4}-\ln x>0 \qquad -\ln(x^2-4)>0$$

$$\ln(x^2-4)<0 \qquad x^2-4<1$$

Considerando anche le intersezioni con il dominio, la funzione è positiva per:

$$\boldsymbol{2<x<\sqrt{5}}$$



$$B.\quad y=\frac{5x}{\sqrt{2^x-8}}+\sqrt{-x}$$

Dominio:
Gli argomenti delle radici devono essere non negativi e il denominatore diverso da zero, perciò:

$$\begin{cases}2^x-8>0\\ -x\geq 0\end{cases}\qquad \begin{cases}x>3\\ x\leq 0\end{cases}$$

Il sistema è impossibile, perciò non si può rappresentare la funzione, essendo il dominio vuoto.

$$C.\quad y=\frac{27-\sqrt{3^x}}{\sqrt{e^x+1}}$$

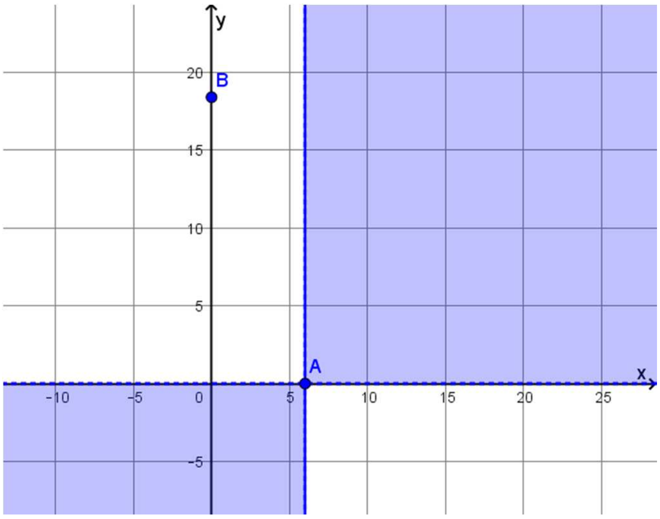
Dominio:
Gli argomenti delle radici devono essere non negativi e, nel caso del denominatore, diversi da zero. Trattandosi di esponenziali, gli argomenti sono sempre positivi, perciò il dominio coincide con $\mathbb{R}$.

Intersezione con gli assi:

$$\begin{cases} y=\dfrac{27-\sqrt{3^x}}{\sqrt{e^x+1}} \\ y=0 \end{cases} \qquad 27-3^{\frac{x}{2}}=0 \qquad 3^3=3^{\frac{x}{2}} \qquad x=6$$

$$\boldsymbol{A\,(6;0)}$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{27-\sqrt{3^x}}{\sqrt{e^x+1}} \\ x=0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{B\,(0;13\sqrt{2})}$$



Segno della funzione:

$$\frac{27-\sqrt{3^x}}{\sqrt{e^x+1}}>0 \qquad 27-3^{\frac{x}{2}}>0$$

$$3^{\frac{x}{2}}<3^3 \qquad \boldsymbol{x<6}$$

$$D.\quad y=\frac{1}{\sqrt{x-1}+x-3}$$

Dominio:
L'argomento della radice deve essere non negativo e il denominatore non nullo:

$$\begin{cases} x-1\geq 0 \\ \sqrt{x-1}+x-3\neq 0 \end{cases}$$

Risolvo la seconda disequazione come se fosse un'equazione:

$$\sqrt{x-1}=-x+3 \qquad x-1=x^2-6x+9 \qquad x^2-7x+10=0 \qquad x_{1,2}=\frac{7\pm 3}{2}=\Big\langle\begin{matrix}2\\5\end{matrix}$$

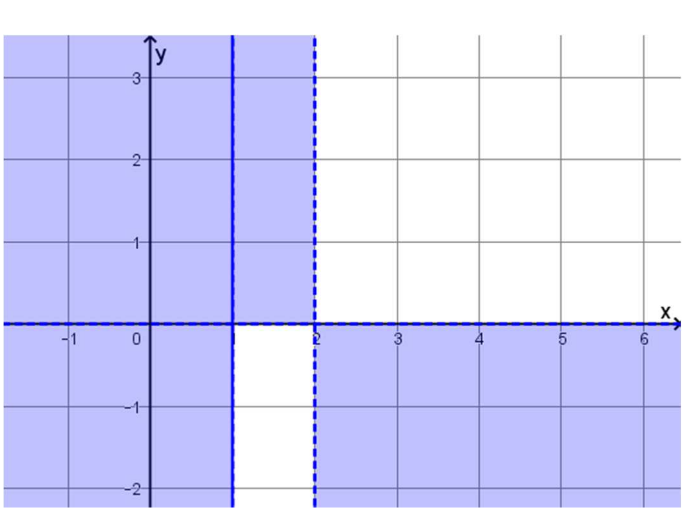
$x=5$ non è soluzione dell'equazione, ma $x=2$ sì, perciò:

$$\begin{cases} x\geq 1 \\ x\neq 2 \end{cases} \qquad \boldsymbol{D=[1;2[\,\cup\,]2;+\infty[}$$

Intersezione con gli assi:
l'unica intersezione possibile è quella con l'asse x:

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+x-3} \\ y=0 \end{cases} \qquad \frac{1}{\sqrt{x-1}+x-3}=0$$

È impossibile, perciò non ci sono intersezioni nemmeno con l'asse x.



Segno della funzione:

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}+x-3}>0 \qquad \sqrt{x-1}+x-3>0$$

$$\begin{cases} -x+3\geq 0 \\ x-1>x^2-6x+9 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x-1\geq 0 \\ -x+3<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\leq 3 \\ 2<x<5 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x\geq 1 \\ x>3 \end{cases}$$

$$2<x\leq 3 \quad \vee \quad x>3$$

$$x>2$$

$E.\quad y = arc\sin\sqrt{1-x}$

Dominio:
L'argomento della radice deve essere non negativo e l'argomento della funzione trigonometrica deve essere compreso tra -1 e 1, estremi inclusi:

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ -1 \leq \sqrt{1-x} \leq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 1 \\ \sqrt{1-x} \leq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

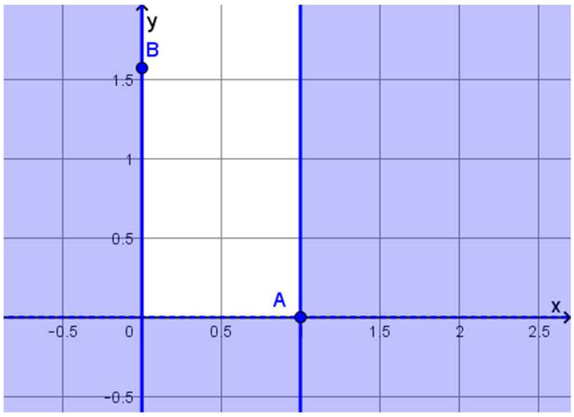
$$0 \leq x \leq 1$$

$$\boldsymbol{D = [0;1]}$$

Intersezione con gli assi:

$$\begin{cases} y = arc\sin\sqrt{1-x} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \sqrt{1-x} = 0 \qquad \boldsymbol{A\,(1;0)}$$

$$\begin{cases} y = arc\sin\sqrt{1-x} \\ x = 0 \end{cases} \qquad y = arc\sin 1 \qquad \boldsymbol{B\left(0;\frac{\pi}{2}\right)}$$



Segno della funzione:

$$arc\sin\sqrt{1-x} > 0 \qquad 0 < \sqrt{1-x} < 1$$

$$\sqrt{1-x} < 1 \qquad 1-x < 1$$

$$\boldsymbol{x > 0}$$

$F.\quad y = \dfrac{x-2}{x^2 - 3\,|x|}$

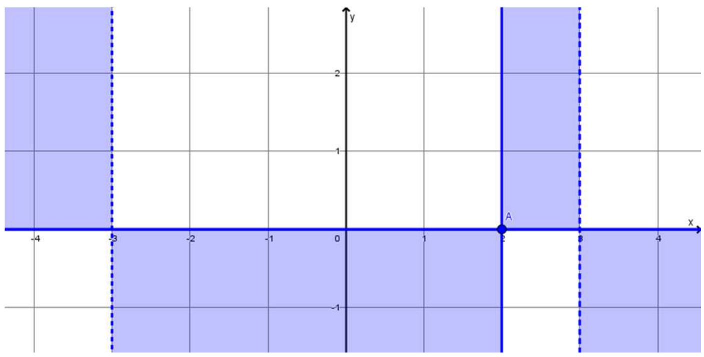
Dominio:
Il denominatore deve essere diverso da zero, perciò:

$$x^2 - 3|x| \neq 0 \qquad x \neq 0 \wedge x \neq \pm 3$$

$$\boldsymbol{D =]-\infty;-3[\,\cup\,]-3;0[\,\cup\,]0;3[\,\cup\,]3;+\infty[}$$

Intersezione con gli assi:
l'unica intersezione possibile è quella con l'asse x:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x-2}{x^2-3\,|x|} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{A\,(2;0)}$$



Segno della funzione:

$$\frac{x-2}{x^2-3\,|x|} > 0 \qquad \begin{matrix} N > 0\colon x > 2 \\ D > 0\colon\ x^2 - 3\,|x| > 0 \end{matrix}$$

Procediamo con lo studio del segno del denominatore:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 3x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + 3x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < 0 \ \vee\ x > 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x < -3 \ \vee\ x > 0 \end{cases}$$

$$x > 3 \quad \vee \quad x < -3$$

Facciamo lo studio dei segni con il numeratore:

$-\infty$	-3	2	3
$-$	$-$	$+$	$+$
$+$	$-$	$-$	$+$
$-$	$+$	$-$	$+$

$$\boldsymbol{-3 < x < 2 \quad \vee \quad x > 3}$$

2. Dimostra che l'equazione $\cos x = x^2 - 3x$ ha una sola soluzione reale nell'intervallo $[2;3]$ e calcolane il valore approssimato con due cifre decimali esatte.

Risolvere l'equazione data è come risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = \cos x \\ y = x^2 - 3x \end{cases}$$

La seconda equazione rappresenta una parabola di vertice $V\left(\frac{3}{2}; -\frac{9}{4}\right)$. Le funzioni hanno due intersezioni, ma a noi interessa solo quella nell'intervallo $[2;3]$. Applichiamo il metodo di bisezione:

$$f(2) > 0 \qquad f(3) < 0$$

$$f(2{,}5) > 0$$

Perciò la soluzione è compresa tra 2,5 e 3:

$$f(2{,}75) < 0$$

Perciò la soluzione è compresa tra 2,5 e 2,75:

$$f(2{,}625) > 0$$

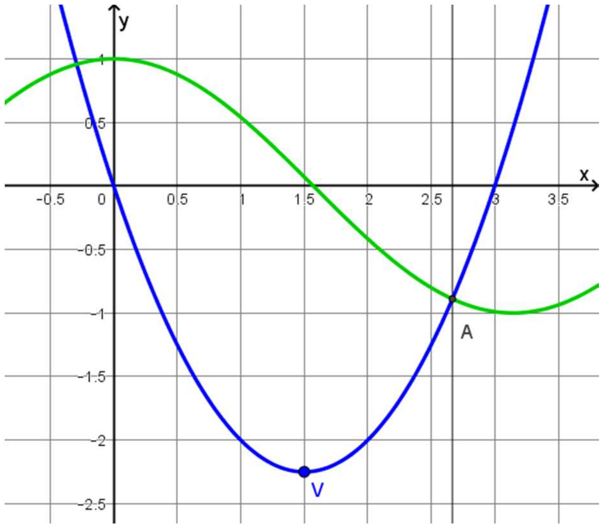
Perciò la soluzione è compresa tra 2,625 e 2,75:

$$f(2{,}6875) < 0$$

Perciò la soluzione è compresa tra 2,625 e 2,6875.

La soluzione, facendo la media tra gli ultimi due valori è, approssimata alla seconda cifra decimale:

$$x \sim \mathbf{2{,}66}$$



3. Determina le soluzioni dell'equazione $2x^3 - 3x + 2 = 0$ approssimandole alla seconda cifra decimale.

Risolvere l'equazione data è come risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = 2x^3 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$$

Le funzioni hanno una sola intersezione, che si trova nell'intervallo $[-2;-1]$. Applichiamo il metodo di bisezione:

$$f(-2) < 0 \qquad f(-1) > 0$$

$$f(-1{,}5) < 0$$

Perciò la soluzione è compresa tra $-1{,}5$ e -1:

$$f(-1{,}25) > 0$$

Perciò la soluzione è compresa tra $-1{,}5$ e $-1{,}25$:

$$f(-1{,}375) > 0$$

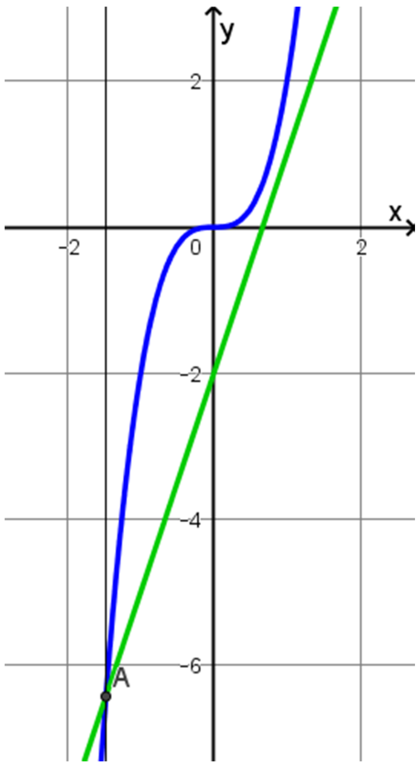
Perciò la soluzione è compresa tra $-1{,}5$ e $-1{,}375$:

$$f(-1{,}4375) > 0$$

Perciò la soluzione è compresa tra $-1{,}5$ e $-1{,}4375$.

La soluzione, facendo la media tra gli ultimi due valori è, approssimata alla seconda cifra decimale:

$$x \sim \mathbf{-1{,}47}$$



4. Osserva i grafici delle seguenti funzioni e deducine dominio, coordinate delle intersezioni con gli assi e segno.

Dominio:

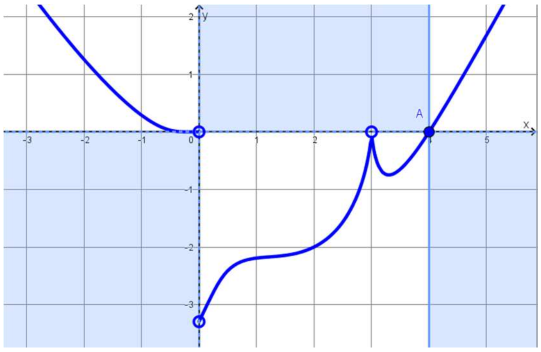
$$D =]-\infty; 0[\cup]0; 3[\cup]3;\ +\infty[$$

Intersezioni con gli assi:

$$A\ (4; 0)$$

Segno della funzione:

$$f(x) > 0: \quad x < 0 \quad \vee \quad x > 4$$



Dominio:

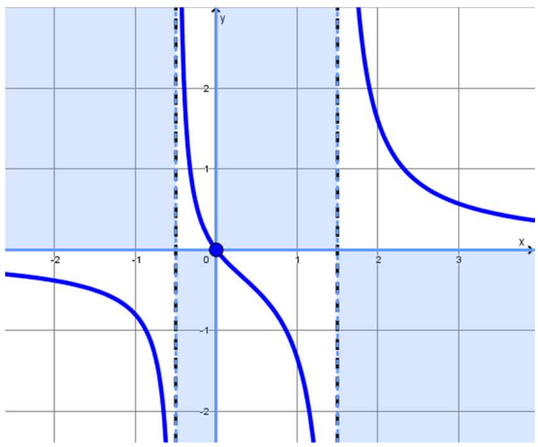
$$D = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}\ ;\ +\infty\right[$$

Intersezioni con gli assi:

$$O\ (0; 0)$$

Segno della funzione:

$$f(x) > 0: \quad -\frac{1}{2} < x < 0 \quad \vee \quad x > \frac{3}{2}$$



5. Date le rette:

$$r: \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y - 2z - 5 = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 3x - y - z - 2 = 0 \\ 5x - 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

A. verificare che sono parallele e distinte
B. determinare il piano che le contiene entrambe
C. calcolane la distanza

A. Scrivo innanzi tutto le due rette in forma parametrica:

$$r: \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + 5\,; \\ z = t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} y = 3x - k - 2 \\ 5x - 6x + 2k + 4 - k - 1 = 0 \\ z = k \end{cases} \Rightarrow \quad s: \begin{cases} x = k + 3 \\ y = 2k + 7 \\ z = k \end{cases}$$

I vettori delle due rette sono, rispettivamente: $\vec{r}\ (1; 2; 1)$ e $\vec{s}\ (1; 2; 1)$, perciò le due rette hanno la stessa direzione.

Per verificare che siano distinte, scelgo un punto qualsiasi della retta r e verifico che non appartiene ad s:

$$P\ (2; 5; 0) \in r \qquad \begin{cases} 2 = k + 3 \\ 5 = 2k + 7 \\ 0 = k \end{cases} \Rightarrow \quad P \notin s$$

B. Il piano che le contiene entrambe avrà parametri direttori perpendicolari a quelli delle rette e passerà per un paio di punti (possiamo prendere il punto P, appena determinato, e il punto Q, ottenuto sostituendo nella retta s il parametro uguale a 0):
Generica equazione del piano: $ax + by + cz + d = 0$

$$\begin{matrix} condizione\ di\ perpendicolarità \\ passaggio\ per\ P \\ passaggio\ per\ Q \end{matrix} \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ 2a + 5b + d = 0 \\ 3a + 7b + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = -a - 2b \\ d = -2a - 5b \\ 3a + 7b - 2a - 5b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -2b \\ c = 0 \\ d = -b \end{cases}$$

L'equazione del piano è: $\mathbf{2x - y + 1 = 0}$

C. Considero il punto P della retta r, determino il piano α perpendicolare alla retta r (ovvero con i suoi stessi parametri direttori) e passante per P. Determino il punto T, intersezione del piano α con la retta s, e calcolo la lunghezza del segmento PT, distanza tra le due rette:

Il piano α ha generica equazione: $x + 2y + z + d = 0$. Impongo il passaggio per il punto P, sostituendo le sue coordinate nell'equazione:

$$2 + 10 + d = 0 \qquad d = -12 \qquad \alpha: x + 2y + z - 12 = 0$$

$$\begin{cases} x + 2y + z - 12 = 0 \\ s \end{cases} \qquad k + 3 + 4k + 14 + k - 12 = 0 \qquad k = -\frac{5}{6} \qquad T\left(\frac{13}{6}; \frac{16}{3}; -\frac{5}{6}\right)$$

$$\overline{PT} = \sqrt{\left(2 - \frac{13}{6}\right)^2 + \left(5 - \frac{16}{3}\right)^2 + \left(0 + \frac{5}{6}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{1}{6}\sqrt{1 + 4 + 25} = \mathbf{\frac{\sqrt{30}}{6}}$$

6. In un'urna ci sono 20 biglie, ognuna delle quali è rossa o nera. Stabilire quante sono quelle nere, sapendo che estraendo due biglie senza riporre la prima estratta, la probabilità di estrarre almeno una biglia nera è $27/38$.

Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero (Americhe), Sessione ordinaria, 2016, quesito 2

Sia x il numero delle biglie nere, pongo la probabilità che ci sia almeno una biglia nera in due estrazioni uguale a 27/38:

$$\frac{x}{20}\cdot\frac{x-1}{19}+2\cdot\frac{x}{20}\cdot\frac{20-x}{19}=\frac{27}{38} \qquad x^2-x+40x-2x^2=270$$

$$x^2-39\,x+270=0 \qquad x_{1,2}=\frac{39\pm 21}{2}=\left\langle\begin{matrix}30\\9\end{matrix}\right.$$

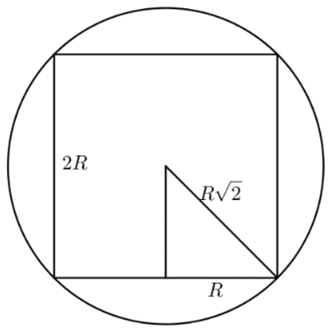
L'unica soluzione possibile è che ci siano **9** biglie nere.

7. Dati un cilindro equilatero e la sfera a esso circoscritta, qual è la probabilità che un punto interno alla sfera cada all'interno del cilindro?

Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero (Americhe), Sessione ordinaria, 2016, quesito 3

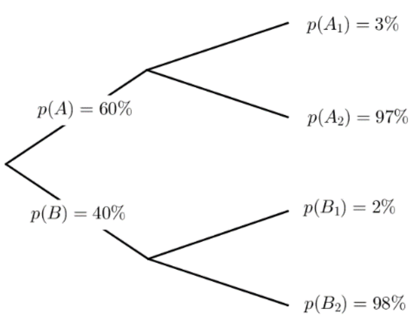
Per determinare la probabilità che un punto interno alla sfera cada all'interno del cilindro, calcoliamo il rapporto tra il volume del cilindro e quello della sfera, ricavando le informazioni dal disegno realizzato a lato:

$$\frac{V_c}{V_s}=\frac{\pi R^2\cdot 2R}{\frac{4}{3}\pi\left(R\sqrt{2}\right)^3}=\frac{3}{4\sqrt{2}}\sim\mathbf{53\%}$$



8. Un'azienda produce, in due capannoni vicini, scatole da imballaggio. Nel primo capannone si producono 600 scatole al giorno delle quali il 3% è difettoso, mentre nel secondo capannone se ne producono 400 con il 2% di pezzi difettosi. La produzione viene immagazzinata in un unico capannone dove, nel corso di un controllo casuale sulla produzione di una giornata, si trova una scatola difettosa. Qual è la probabilità che la scatola provenga dal secondo capannone?

Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di Ordinamento, Sessione straordinaria, 2016, quesito 5



Per il teorema di Bayes:

$$p(B_1|B)=\frac{p(B_1\cap B)}{p(A_1\cup B_1)}=\frac{p(B|B_1)\,p(B_1)}{p(B|B_1)\,p(B_1)+p(A|A_1)\,p(A_1)}=$$

$$=\frac{\frac{40}{100}\cdot\frac{2}{100}}{\frac{40}{100}\cdot\frac{2}{100}+\frac{60}{100}\cdot\frac{3}{100}}=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{13}}\sim\mathbf{30,77\%}$$