1. Tra le seguenti coppie di equazioni indica se rappresentano la stessa funzione, motivando la tua risposta:

A. $y = \ln\,(x-3)^2$ $\qquad y = 2\ln(x-3)$

La prima funzione, per la proprietà dei logaritmi, si può riscrivere come: $y = 2\ln\,|x-3|$. Il suo dominio è $D_1 = \mathbb{R} - \{3\}$. La seconda funzione, invece, ha dominio $D_2 = (3;\,+\infty)$, perciò **le due funzioni non sono uguali** perché non hanno la stessa espressione e quindi non hanno lo stesso dominio.

B. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2}}$ $\qquad y = 1$

La prima funzione si può riscrivere in una forma più semplice:

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & se\ x > 0 \\ -1 & se\ x < 0 \end{cases}$$

Le due funzioni non sono uguali.

C. $y = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x+2}$ $\qquad y = \sqrt{x\,(2+x)}$

Le due funzioni hanno apparentemente la stessa espressione, visto che la prima può essere scritta come la seconda. Ma i due domini sono diversi, infatti:

$$D_1:\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \qquad D_1 = [0;\,+\infty)$$

$$D_2: x(2+x) \geq 0 \qquad D_2 = (-\infty;\,-2]\ \cup [0;\,+\infty)$$

Avendo domini diversi, **le due funzioni non sono uguali**.

D. $y = \frac{x^3}{x^2}$ $\qquad y = x$

Le due funzioni hanno la stessa espressione analitica, ma mentre la seconda ha dominio $\mathbb{R}$, la prima ha dominio $\mathbb{R} - \{0\}$. Avendo domini diversi, **le due funzioni non sono uguali**.

2. Date le funzioni $f(x) = \frac{x+1}{x}$ e $g(x) = x^2$:

A. determina $h = f \circ g$;

B. risolvi la disequazione $h(x) \leq f(2x)$.

A. La funzione $f(x)$ è una funzione algebrica razionale fratta, con $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ e $Im\ f = \mathbb{R} - \{1\}$. La seconda funzione è una funzione algebrica razionale intera, perciò ha $D_g = \mathbb{R}$. Siccome $Im\ f \subseteq D_g$, possiamo procedere con la composizione delle funzioni e otteniamo:

$$h(x) = f\,\big(\,g(\,x)\big) = f(x^2) = \boldsymbol{\frac{x^2+1}{x^2}}$$

B. Determiniamo $f(2x) = \frac{2x+1}{2x}$. Possiamo a questo punto risolvere la disequazione:

$$\frac{x^2+1}{x^2} \leq \frac{2x+1}{2x} \qquad \frac{2(x^2+1) - x(2x+1)}{2x^2} \leq 0 \qquad \frac{2-x}{x^2} \leq 0 \qquad \boldsymbol{x \geq 2}$$

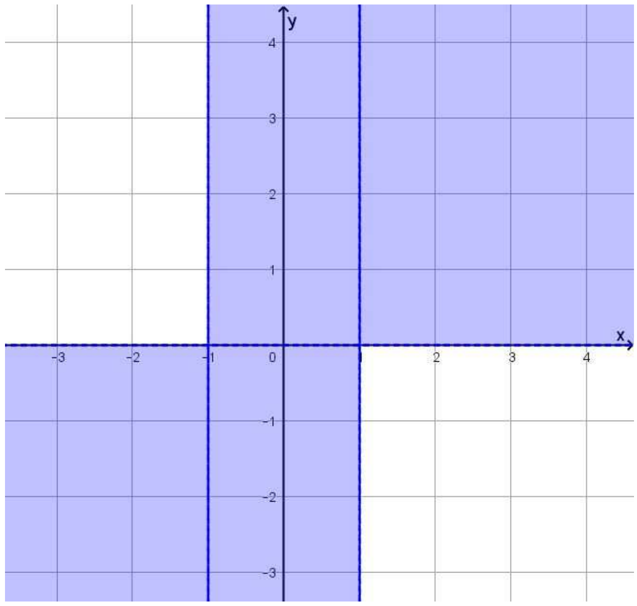
3. Scegli una delle seguenti funzioni e determinane dominio, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi, intervalli di positività. Rappresenta infine gli elementi trovati in un piano cartesiano:

$$y = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

Dominio: trattandosi di una funzione trascendente logaritmica, devo porre l'argomento del logaritmo maggiore di zero:

$$\frac{x-1}{x+1} > 0 \qquad x < -1 \quad \vee \quad x > 1$$

$$\boldsymbol{D = (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)}$$



La funzione potrebbe essere simmetrica, valuto quindi eventuali simmetrie rispetto all'asse y o all'origine:

$$f(-x) = \ln\frac{-x-1}{-x+1} = \ln\frac{x+1}{x-1} =$$
$$= \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-1} = -\ln\frac{x-1}{x+1} = -f(x)$$

Si tratta di una funzione **dispari**.

Studio gli intervalli di positività:

$$\ln\frac{x-1}{x+1} > 0 \qquad \frac{x-1}{x+1} > 1 \qquad -\frac{2}{x+1} > 0$$
$$\frac{2}{x+1} < 0 \qquad x+1 < 0 \qquad x < -1$$

La funzione è positiva per $\boldsymbol{x < -1}$.

Per quanto riguarda le intersezioni con gli assi, possiamo vedere dal dominio che non ci sono intersezioni con l'asse y e, dalla soluzione della disequazione per la positività della funzione, che non ci sono intersezioni con l'asse x.

$$y = \sqrt{x^2 - |x|}$$

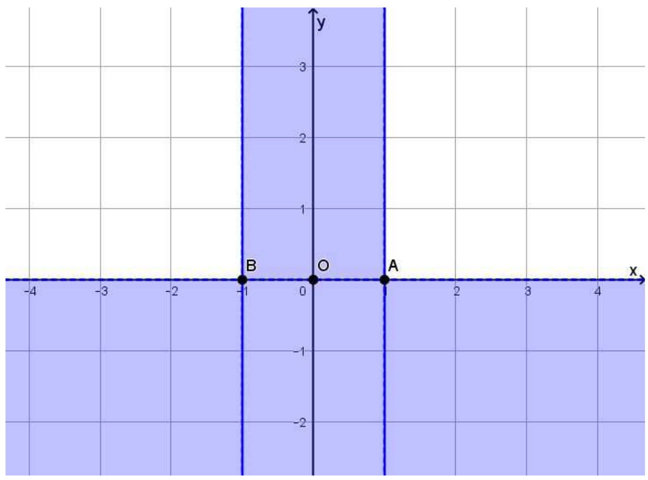
Dominio: trattandosi di una funzione algebrica irrazionale, devo porre l'argomento della radice maggiore o uguale a zero:

$$x^2 - |x| \geq 0 \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 0 \quad \vee \quad x \geq 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ x \leq -1 \quad \vee \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x \geq 1 \quad \vee \quad x \leq -1$$

$$\boldsymbol{D = (-\infty;\ -1] \cup \{0\} \cup [1;\ +\infty)}$$



La funzione potrebbe essere simmetrica, valuto quindi eventuali simmetrie rispetto all'asse y o all'origine:

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - |-x|} = \sqrt{x^2 - |x|} = f(x)$$

Si tratta di una funzione **pari**.

La funzione è sempre positiva nel suo dominio.

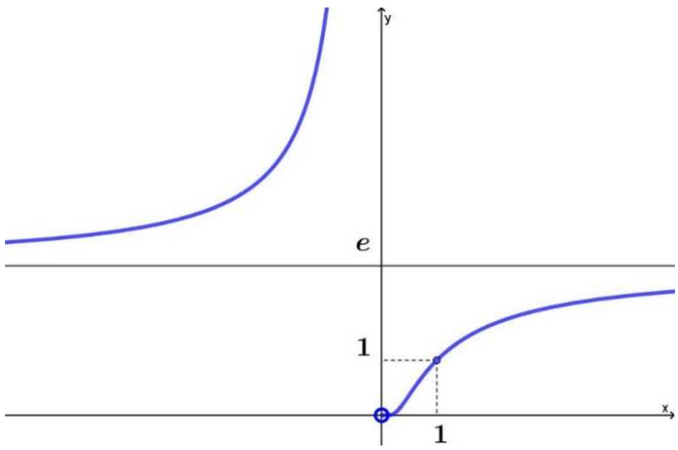
Determiniamo le intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x^2 - |x|} \\ y = 0 \end{cases} \qquad x^2 - |x| = 0 \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x = 0 \quad \vee \quad x = 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ x = 0 \quad \vee \quad x = -1 \end{cases} \qquad x = 0, x = 1, x = -1$$

I tre punti di intersezione con gli assi sono: $\boldsymbol{A\ (1;0)},\ \boldsymbol{B(-1;0)}, \boldsymbol{O(0;0)}$.

4. Nel grafico è rappresentata la funzione $f(x) = e^{\frac{x+k}{x}}$.
   A. Trova il valore di k.
   B. Determina il dominio e l'insieme immagine di $f(x)$ e individua gli intervalli in cui è crescente.
   C. Indica se è invertibile e in caso trova l'espressione analitica della funzione inversa.



A. Impongo il passaggio della funzione per il punto $(1; 1)$, evidenziato dal grafico:

$$1 = e^{\frac{1+k}{1}} \qquad 1 + k = 0 \qquad \boldsymbol{k = -1}$$

B. Dal grafico otteniamo le informazioni necessarie:

$$\boldsymbol{D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)}$$
$$\boldsymbol{Imf = (0; e) \cup (e; +\infty)}$$

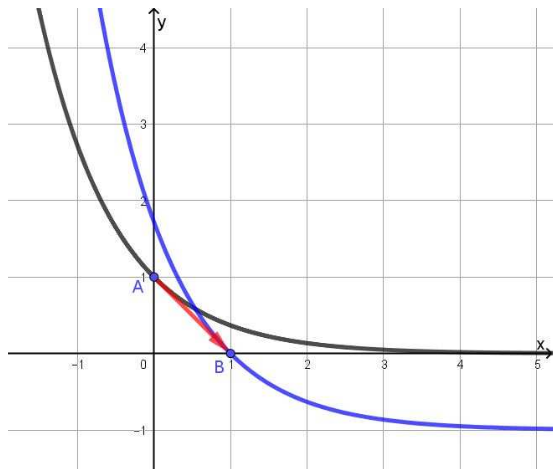
La funzione è crescente in tutto il dominio.

C. La funzione, essendo iniettiva e suriettiva nel suo codominio, è invertibile:

$$y = e^{\frac{x-1}{x}} \qquad \frac{x-1}{x} = \ln y \qquad 1 - \frac{1}{x} = \ln y$$

$$\frac{1}{x} = 1 - \ln y \qquad \boldsymbol{f^{-1}(x) = \frac{1}{1 - \ln x}}$$

5. Risolvi il seguente problema:
   A. Trova il dominio, il segno e le intersezioni con gli assi della funzione $f(x) = e^{-x+1} - 1$.
   B. Disegna il grafico di $f(x)$ utilizzando le trasformazioni geometriche.
   C. Disegna il grafico di $\frac{1}{f(x)}$, di $y = 2 + f(1 - x)$ e di $y = \frac{f(x)}{|f(x)|} + 3$.
   D. Determina la funzione inversa $f^{-1}(x)$ indicando il dominio, l'insieme immagine e tracciandone il grafico.



A. La funzione non ha limitazioni nel dominio, perciò: $\boldsymbol{D = \mathbb{R}}$.
Determiniamo le sue intersezioni con gli assi:

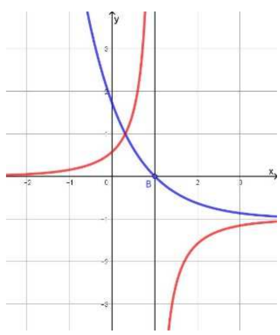
$$\begin{cases} y = e^{-x+1} - 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} e^{-x+1} = e^0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{B(1, 0)}$$

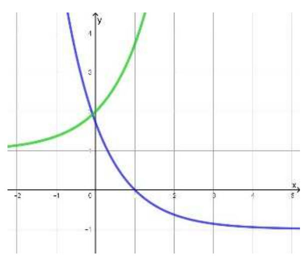
$$\begin{cases} y = e^{-x+1} - 1 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = e - 1 \end{cases} \qquad \boldsymbol{C(0, e - 1)}$$

Studiamo il segno della funzione:

$$e^{-x+1} - 1 > 0 \qquad e^{-x+1} > e^0 \qquad x < 1$$

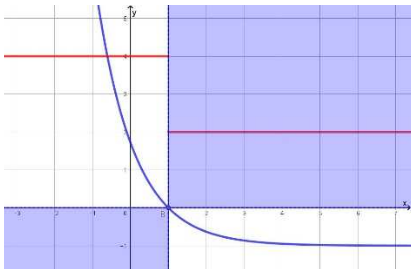
B. Rappresentiamo la funzione $y = e^{-x}$ (in nero nel grafico) e poi trasliamo la funzione di un vettore $\overrightarrow{AB}\ (1, -1)$. La funzione risultante è rappresentata in blu.





C. Per rappresentare la funzione reciproca, individuo le intersezioni della funzione con l'asse x (ovvero $x = 1$) e in quel punto la nuova funzione avrà un asintoto verticale. Individuo il punto di ordinata 1, che apparterrà anche alla funzione reciproca. Ricordo poi che la funzione reciproca mantiene il segno della funzione di partenza e che nei tratti con ordinata in valore assoluto compresa tra 0 e 1, la nuova funzione avrà ordinata in valore assoluto maggiore di 1, viceversa nei tratti con ordinata in valore assoluto maggiore di 1. La funzione è rappresentata in rosso.
$y = 2 + f(1 - x) = 2 + e^{-(1-x)+1} - 1 = 1 + e^x$ rappresentata in verde.

$$y = \frac{f(x)}{|f(x)|} + 3 = \begin{cases} 4 & se\ f(x) > 0 \\ 2 & se\ f(x) < 0 \end{cases}$$



D. $y = e^{-x+1} - 1 \qquad y + 1 = e^{-x+1} \qquad -x + 1 = \ln(y + 1)$

$$\boldsymbol{f^{-1}(x) = 1 - \ln(x + 1)}$$

Il dominio della funzione inversa coincide con il codominio della funzione, ovvero: $D_{f^{-1}} = (-1;\ +\infty)$; il codominio, invece, coincide con il dominio della funzione, quindi: $C_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.