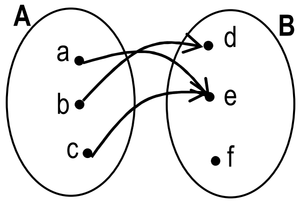
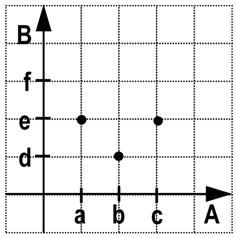
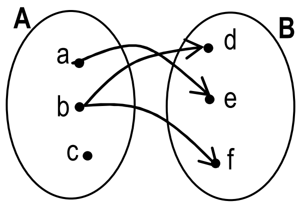
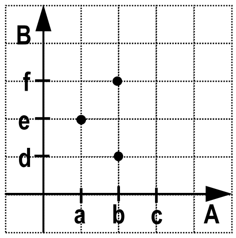
1. Completa la seguente tabella:

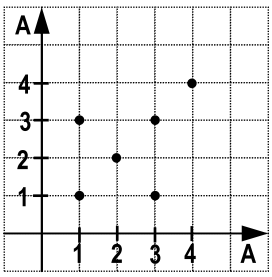
Rappresentazione sagittale	Dominio e Codominio	Rappresentazione per elencazione	Rappresentazione cartesiana
	$D = \{a; b; c\}$ $C = \{d; e\}$	$\mathcal{R} = \{(a; e); (b; d); (c; e)\}$	
	$D = \{a; b\}$ $C = \{d; e; f\}$	$\mathcal{R} = \{(a; e); (b; d); (b; f)\}$	

2. Considera l'insieme $E = \{(a; b) | a, b \in \mathbb{N}^*\}$. Dimostra che la relazione $(a; b)\mathcal{R}(c; d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ è una relazione di equivalenza.

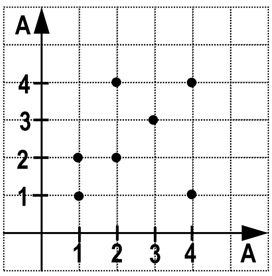
Verifico che valgano le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva:

- Devo verificare che $(a; b)\mathcal{R}(a; b)\ \forall (a; b) \in E$.
  Infatti, $(a; b)\mathcal{R}(a; b) \Leftrightarrow a \cdot b = b \cdot a$ verificata, visto che vale la proprietà commutativa della moltiplicazione.
- Devo verificare che $(a; b)\mathcal{R}(c; d) \rightarrow (c; d)\mathcal{R}(a; b)\ \forall (a; b) \in E, \forall (c; d) \in E$
  Infatti: $(a; b)\mathcal{R}(c; d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ e $(c; d)\mathcal{R}(a; b) \Leftrightarrow c \cdot b = d \cdot a$
  E l'uguaglianza tra le due relazioni vale per la proprietà commutativa della moltiplicazione.
- Devo verificare che $[(a; b)\mathcal{R}(c; d) \wedge (c; d)\mathcal{R}(e; f)] \rightarrow (a; b)\mathcal{R}(e; f)$
  Infatti: $(a; b)\mathcal{R}(c; d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ e $(c; d)\mathcal{R}(e; f) \Leftrightarrow c \cdot f = d \cdot e$
  Moltiplicando le due espressioni membro a membro otteniamo: $a \cdot d \cdot c \cdot f = b \cdot c \cdot d \cdot e$
  E, semplificando: $a \cdot f = b \cdot e \Leftrightarrow (a; b)\mathcal{R}(e; f)$, ovvero è verificata.

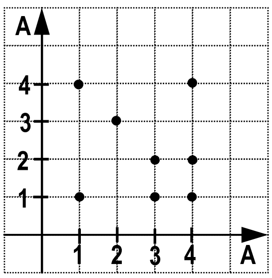
3. Analizza le proprietà delle relazioni, definite in $A = \{1, 2, 3, 4\}$, che hanno le seguenti rappresentazioni:



Riflessiva – Simmetrica – Transitiva



Riflessiva – Antisimmetrica



Nessuna proprietà

4. Stabilisci se, nell'insieme $\mathbb{N}-\{0\}$, la relazione «$\mathrm{x\ è\ multiplo\ di\ y}$» è una relazione di ordine; in caso affermativo, specifica se l'ordine è stretto o largo, parziale o totale.

Verifichiamo se la relazione data è antisimmetrica e transitiva:

- Devo verificare che se $\forall x, y \in \mathbb{N}-\{0\}\ (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \rightarrow x=y$
  Infatti:$(x;y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} | x=ky$ ma se $(y;x) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{N} | y=hx=h(ky)=(hk)y$
  E questa uguaglianza è verificata solo nel caso in cui $hk=1$, ovvero $h=k=1$, ovvero $x=y$.

- Devo verificare che $[x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z] \rightarrow x\mathcal{R}z$
  Infatti: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N} | x=k_1 y$ e $y\mathcal{R}z \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N} | y=k_2 z=k_2(k_1 y)=(k_2 k_1)y$
  Siccome $k_2 k_1 \in \mathbb{N}$, $x\mathcal{R}z$, ovvero la proprietà transitiva è verificata.

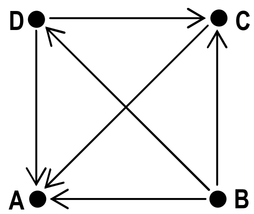
Si tratta quindi di una relazione di ordine. È una relazione di ordine parziale, perché esistono sicuramente dei numeri naturali che non sono in relazione tra loro, ovvero tali per cui non sono uno multiplo dell'altro, ad esempio 2 e 3.

È una relazione di ordine largo, perché vale la proprietà riflessiva, infatti:

$$\forall x \in \mathbb{N}-\{0\}\ \ x\mathcal{R}x \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} | x=kx$$

Basta scegliere $k=1$.

5. Anna, Barbara, Carla e Donatella, che indichiamo con le iniziali dei loro nomi, A, B, C e D, sono le giocatrici partecipanti a un torneo di tennis. Ciascuna gioca una e una sola partita contro tutte le altre; effettuate tutte le partite, il grafo che rappresenta la relazione «$\mathrm{x\ ha\ sconfitto\ y}$» nell'insieme $\{\mathrm{A, B, C, D}\}$ è quello riportato nella figura qui a lato. Stabilisci qual è la classifica e se si tratta di una relazione d'ordine.



Si tratta di una relazione di ordine, infatti è antisimmetrica – se x ha sconfitto y, sicuramente y non ha sconfitto x – ed è transitiva, perché se B ha sconfitto C e C ha sconfitto A, anche B ha sconfitto A.

Possiamo stabilire la classifica, dalla prima all'ultima: **B D C A**

Infatti, B non ha subito sconfitte, D ha subito una sola sconfitta, C due sconfitte e A è stata sconfitta in tutti gli incontri.

6. Stabilisci il dominio delle seguenti funzioni:

$$y=\frac{1}{x-1} \qquad y=\frac{1}{2x^2-3x+1} \qquad y=\frac{1}{2x^2+8} \qquad y=\frac{1}{36-x^2} \qquad y=\frac{1}{x^3-1}$$

A. $D=\mathbb{R}-\{1\}$

B. Scomponiamo innanzi tutto il denominatore:

$$2x^2-3x+1=2x^2-2x-x+1=2x(x-1)-1(x-1)=(x-1)(2x-1)$$

$D=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2};1\right\}$

C. $D=\mathbb{R}$

D. Scomponendo il denominatore:

$$36-x^2=(6-x)(6+x)$$

$D=\mathbb{R}-\{-6;6\}$

E. Scomponendo il denominatore:

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

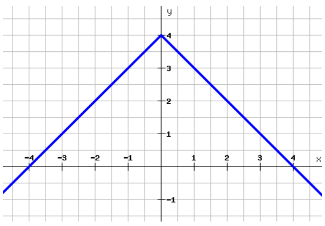
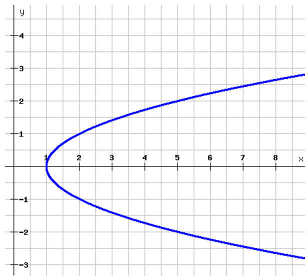
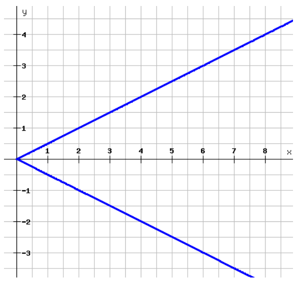
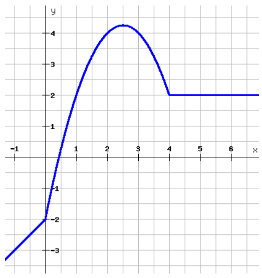
$D=\mathbb{R}-\{1\}$

7. Data la funzione $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$, calcola l'immagine di $\frac{2}{3}$ e la controimmagine di 1.

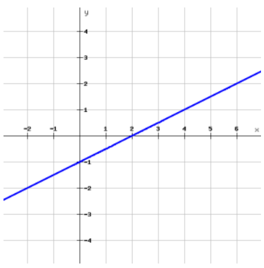
$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \mathbf{0}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}x = \frac{4}{3} \quad \Longrightarrow \quad x = \mathbf{\frac{8}{3}}$$

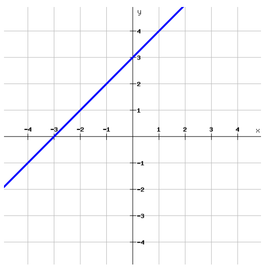
8. Completa la seguente tabella:

	È una funzione? **Sì** Dominio: $D = \mathbb{R}$ Codominio: $C = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 4\}$		È una funzione? **No** Dominio: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ Codominio: $C = \mathbb{R}$
	È una funzione? **No** Dominio: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ Codominio: $C = \mathbb{R}$		È una funzione? **Sì** Dominio: $D = \mathbb{R}$ Codominio: $C = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{17}{4}\right\}$

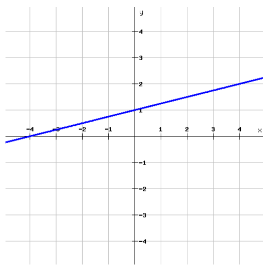
9. Dati i grafici delle seguenti rette, determina le loro equazioni:



$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x - 1}$



$\boldsymbol{y = x + 3}$



$\boldsymbol{y = \frac{1}{4}x + 1}$

10. La retta r ha equazione $\mathrm{y}=\mathrm{ax}-1$ e passa per il punto $\mathrm{A}\ (2; 3)$; la retta s passa per $\mathrm{B}\ \left(\frac{2}{3}; 1\right)$ e ha equazione $\mathrm{y}=3\mathrm{x}-\mathrm{b}$. Dopo aver trovato i valori di a e di b, disegna r e s. Calcola poi le ordinate dei punti di r e di s che hanno ascissa 0. Che cosa puoi dedurre?

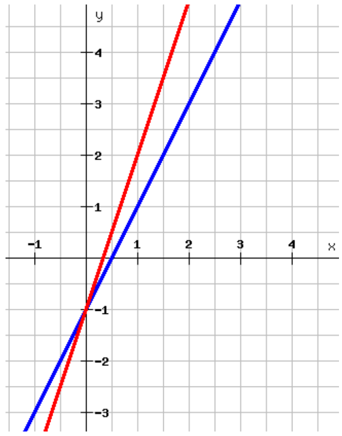
Sapendo che la retta r passa per il punto A, allora le coordinate di A soddisfano l'equazione e, sostituendole nell'equazione, ricaviamo il valore del parametro a:

$$3=2a-1 \quad \Longrightarrow \quad 2a=4 \quad \Longrightarrow \quad a=2 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{y=2x-1}$$

Sapendo che la retta s passa per il punto B, allora le coordinate di B soddisfano l'equazione e, sostituendole nell'equazione, ricaviamo il valore del parametro b:

$$1=3\cdot\frac{2}{3}-b \quad \Longrightarrow \quad b=1 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{y=3x-1}$$

Ho rappresentato le due rette nel grafico: in blu la retta r e in rosso la retta s.



Sostituisco l'ascissa 0 in entrambe le equazioni:

$$r: y=-1 \qquad\qquad s: y=-1$$

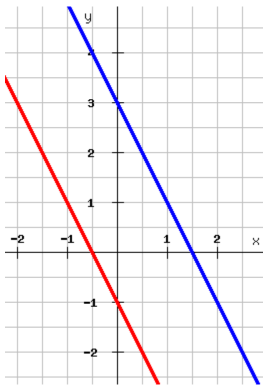
In altre parole, le rette si intersecano nel punto $C(0;\ -1)$, come si evince anche dal grafico.

11. Determina il valore da attribuire al parametro k in modo che le rette di equazione $\mathrm{y}=(\mathrm{k}-1)\mathrm{x}+3$ e $\mathrm{y}=2\mathrm{kx}-1$ siano parallele. Disegna le due rette.

Perché le due rette siano parallele, i due coefficienti angolari devono essere uguali, cioè:

$$k-1=2k \quad \Longrightarrow \quad k=-1$$

Ovvero le due rette hanno equazione: $y=-2x+3$ rappresentata in blu e $y=-2x-1$ rappresentata in rosso.



12. Determina il valore di k in modo che la retta $\mathrm{y}=\mathrm{x}-7$ e la parabola $\mathrm{y}=\mathrm{kx}^2-4\mathrm{x}+2\mathrm{k}$ abbiano in comune il punto di ordinata 1.

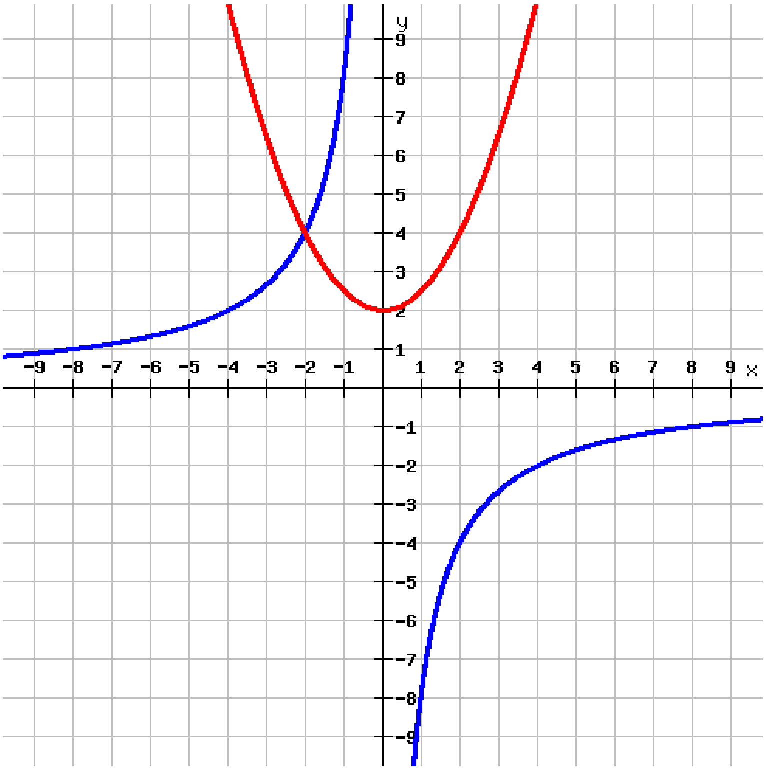
Determino innanzi tutto l'ascissa del punto che appartiene alla retta e ha ordinata 1, sostituendo alla y 1 e ricavando x:

$$1=\mathrm{x}-7 \quad \Longrightarrow \quad x=8 \quad \Longrightarrow \quad (8; 1)$$

Sostituendo il punto appena determinato nell'equazione della parabola, determino il valore di k:

$$1=64\mathrm{k}-32+2\mathrm{k} \quad \Longrightarrow \quad 66k=33 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{k=\frac{1}{2}}$$

13. Disegna, in uno stesso riferimento, l'iperbole di equazione $y = -\frac{8}{x}$ e la parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ e determina graficamente i loro punti di intersezione.



14. Determina per quale valore di x le seguenti funzioni hanno la stessa immagine:

$$f(x) = x^3 - \frac{(x-2)^2}{4} + 2 \qquad g(x) = (x+1)^3 - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2 - 3x^2 - 5$$

$$f(x) = g(x) \quad \Longrightarrow \quad x^3 - \frac{(x-2)^2}{4} + 2 = (x+1)^3 - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2 - 3x^2 - 5$$

$$x^3 - \frac{x^2 - 4x + 4}{4} + 2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - \frac{1}{4}x^2 - x - 1 - 3x^2 - 5$$

$$x^3 - \frac{1}{4}x^2 + x - 1 + 2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - \frac{1}{4}x^2 - x - 1 - 3x^2 - 5$$

$$x + x - 3x = 1 - 5 - 2 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x = 6}$$