

1. Completa la seguente tabella:

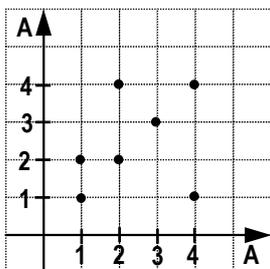
Rappresentazione sagittale	Dominio e Codominio	Rappresentazione per elencazione	Rappresentazione cartesiana
	$D = \{a; b\}$ $C = \{d; e; f\}$	$\mathcal{R} = \{(a; e); (b; d); (b; f)\}$	
	$D = \{a; b; c\}$ $C = \{d; e\}$	$\mathcal{R} = \{(a; e); (b; d); (c; e)\}$	

2. Considera l'insieme $E = \{(a; b) | a, b \in \mathbb{N}^*\}$. Dimostra che la relazione $(a; b)\mathcal{R}(c; d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ è una relazione di equivalenza.

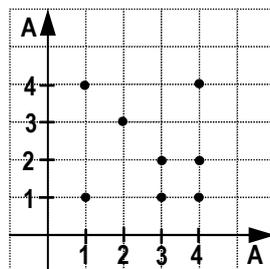
Verifico che valgano le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva:

- Devo verificare che $(a; b)\mathcal{R}(a; b) \forall (a; b) \in E$.
 Infatti, $(a; b)\mathcal{R}(a; b) \Leftrightarrow a \cdot b = b \cdot a$ verificata, visto che vale la proprietà commutativa della moltiplicazione.
- Devo verificare che $(a; b)\mathcal{R}(c; d) \rightarrow (c; d)\mathcal{R}(a; b) \forall (a; b) \in E, \forall (c; d) \in E$
 Infatti: $(a; b)\mathcal{R}(c; d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ e $(c; d)\mathcal{R}(a; b) \Leftrightarrow c \cdot b = d \cdot a$
 E l'uguaglianza tra le due relazioni vale per la proprietà commutativa della moltiplicazione.
- Devo verificare che $[(a; b)\mathcal{R}(c; d) \wedge (c; d)\mathcal{R}(e; f)] \rightarrow (a; b)\mathcal{R}(e; f)$
 Infatti: $(a; b)\mathcal{R}(c; d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ e $(c; d)\mathcal{R}(e; f) \Leftrightarrow c \cdot f = d \cdot e$
 Moltiplicando le due espressioni membro a membro otteniamo: $a \cdot d \cdot c \cdot f = b \cdot c \cdot d \cdot e$
 E, semplificando: $a \cdot f = b \cdot e \Leftrightarrow (a; b)\mathcal{R}(e; f)$, ovvero è verificata.

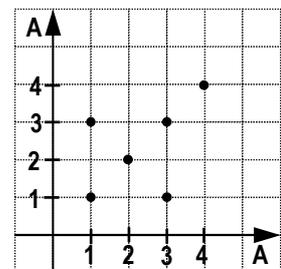
3. Analizza le proprietà delle relazioni, definite in $A = \{1, 2, 3, 4\}$, che hanno le seguenti rappresentazioni:



Riflessiva – Antisimmetrica



Nessuna proprietà



Riflessiva – Simmetrica – Transitiva

4. Stabilisci se, nell'insieme $\mathbb{N} - \{0\}$, la relazione « x è multiplo di y » è una relazione di ordine; in caso affermativo, specifica se l'ordine è stretto o largo, parziale o totale.

Verifichiamo se la relazione data è antisimmetrica e transitiva:

- Devo verificare che se $\forall x, y \in \mathbb{N} - \{0\} (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \rightarrow x = y$
 Infatti: $(x; y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} | x = ky$ ma se $(y; x) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{N} | y = hx = h(ky) = (hk)y$
 E questa uguaglianza è verificata solo nel caso in cui $hk = 1$, ovvero $h = k = 1$, ovvero $x = y$.
- Devo verificare che $[x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z] \rightarrow x\mathcal{R}z$
 Infatti: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N} | x = k_1y$ e $y\mathcal{R}z \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N} | y = k_2z = k_2(k_1y) = (k_2k_1)y$
 Siccome $k_2k_1 \in \mathbb{N}$, $x\mathcal{R}z$, ovvero la proprietà transitiva è verificata.

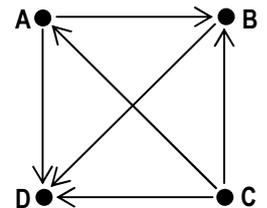
Si tratta quindi di una relazione di ordine. È una relazione di ordine parziale, perché esistono sicuramente dei numeri naturali che non sono in relazione tra loro, ovvero tali per cui non sono uno multiplo dell'altro, ad esempio 2 e 3.

È una relazione di ordine largo, perché vale la proprietà riflessiva, infatti:

$$\forall x \in \mathbb{N} - \{0\} \quad x\mathcal{R}x \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} | x = kx$$

Basta scegliere $k = 1$.

5. Anna, Barbara, Carla e Donatella, che indichiamo con le iniziali dei loro nomi, A, B, C e D, sono le giocatrici partecipanti a un torneo di tennis. Ciascuna gioca una e una sola partita contro tutte le altre; effettuate tutte le partite, il grafo che rappresenta la relazione « x ha sconfitto y » nell'insieme $\{A, B, C, D\}$ è quello riportato nella figura qui a lato. Stabilisci qual è la classifica e se si tratta di una relazione d'ordine.



Si tratta di una relazione di ordine, infatti è antisimmetrica – se x ha sconfitto y , sicuramente y non ha sconfitto x – ed è transitiva, perché se C ha sconfitto B e B ha sconfitto D, anche C ha sconfitto D.

Possiamo stabilire la classifica, dalla prima all'ultima:

C A B D

Infatti, C non ha subito sconfitte, A ha subito una sola sconfitta, B due sconfitte e D è stata sconfitta in tutti gli incontri.

6. Stabilisci il dominio delle seguenti funzioni:

$$y = \frac{1}{x-2} \quad y = \frac{1}{3x^2 - 2x - 1} \quad y = \frac{1}{3x^2 + 27} \quad y = \frac{1}{25 - x^2} \quad y = \frac{1}{x^3 + 1}$$

A. $D = \mathbb{R} - \{2\}$

B. Scomponiamo innanzi tutto il denominatore:

$$3x^2 - 2x - 1 = 3x^2 - 3x + x - 1 = 3x(x - 1) + 1(x - 1) = (x - 1)(3x + 1)$$

$$D = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{3}; 1 \right\}$$

C. $D = \mathbb{R}$

D. Scomponendo il denominatore:

$$25 - x^2 = (5 - x)(5 + x)$$

$$D = \mathbb{R} - \{-5; 5\}$$

E. Scomponendo il denominatore:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

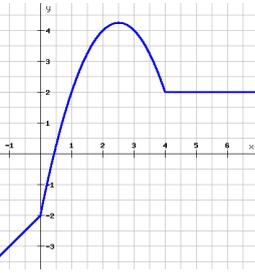
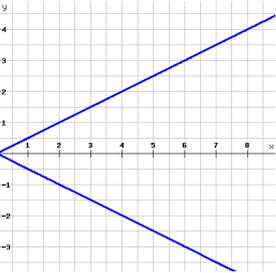
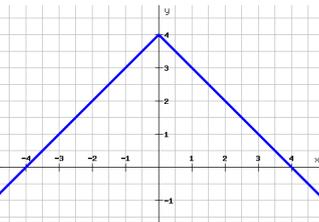
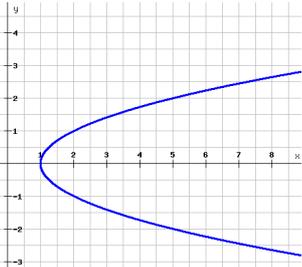
$$D = \mathbb{R} - \{-1\}$$

7. Data la funzione $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$, calcola l'immagine di $\frac{3}{2}$ e la controimmagine di 1.

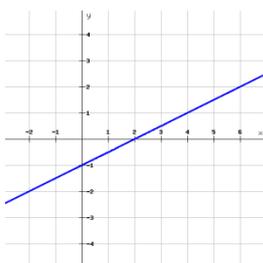
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2} = 1 \implies \frac{1}{3}x = \frac{3}{2} \implies x = \frac{9}{2}$$

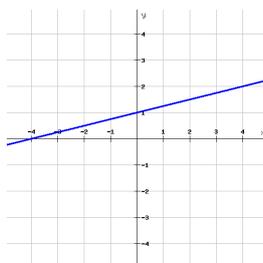
8. Completa la seguente tabella:

	<p>È una funzione? Si</p> <p>Dominio: $D = \mathbb{R}$</p> <p>Codominio: $C = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{17}{4}\right\}$</p>		<p>È una funzione? No</p> <p>Dominio: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$</p> <p>Codominio: $C = \mathbb{R}$</p>
	<p>È una funzione? Si</p> <p>Dominio: $D = \mathbb{R}$</p> <p>Codominio: $C = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 4\}$</p>		<p>È una funzione? No</p> <p>Dominio: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$</p> <p>Codominio: $C = \mathbb{R}$</p>

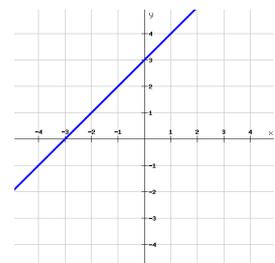
9. Dati i grafici delle seguenti rette, determina le loro equazioni:



$$y = \frac{1}{2}x - 1$$



$$y = \frac{1}{4}x + 1$$



$$y = x + 3$$

10. La retta r ha equazione $y = 3x - a$ e passa per il punto $A\left(\frac{2}{3}; 1\right)$; la retta s passa per $B(2; 3)$ e ha equazione $y = bx - 1$. Dopo aver trovato i valori di a e di b , disegna r e s . Calcola poi le ordinate dei punti di r e di s che hanno ascissa 0. Che cosa puoi dedurre?

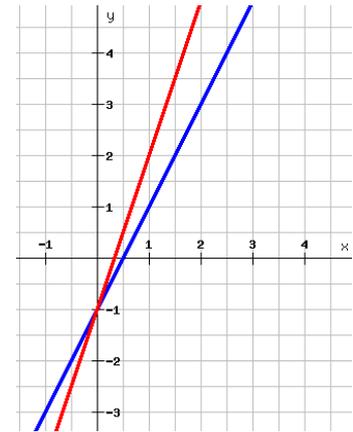
Sapendo che la retta r passa per il punto A , allora le coordinate di A soddisfano l'equazione e, sostituendole nell'equazione, ricaviamo il valore del parametro a :

$$1 = 3 \cdot \frac{2}{3} - a \Rightarrow a = 1 \Rightarrow y = 3x - 1$$

Sapendo che la retta s passa per il punto B , allora le coordinate di B soddisfano l'equazione e, sostituendole nell'equazione, ricaviamo il valore del parametro b :

$$3 = 2b - 1 \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow y = 2x - 1$$

Ho rappresentato le due rette nel grafico: in blu la retta s e in rosso la retta r .



Sostituisco l'ascissa 0 in entrambe le equazioni:

$$r: y = -1 \quad s: y = -1$$

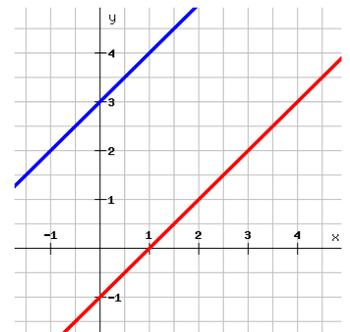
In altre parole, le rette si intersecano nel punto $C(0; -1)$, come si evince anche dal grafico.

11. Determina il valore da attribuire al parametro k in modo che le rette di equazione $y = (2k - 1)x + 3$ e $y = kx - 1$ siano parallele. Disegna le due rette.

Perché le due rette siano parallele, i due coefficienti angolari devono essere uguali, cioè:

$$2k - 1 = k \Rightarrow k = 1$$

Ovvero le due rette hanno equazione: $y = x + 3$ rappresentata in blu e $y = x - 1$ rappresentata in rosso.



12. Determina il valore di k in modo che la retta $y = x - 7$ e la parabola $y = kx^2 - 4x + 2k$ abbiano in comune il punto di ordinata 1.

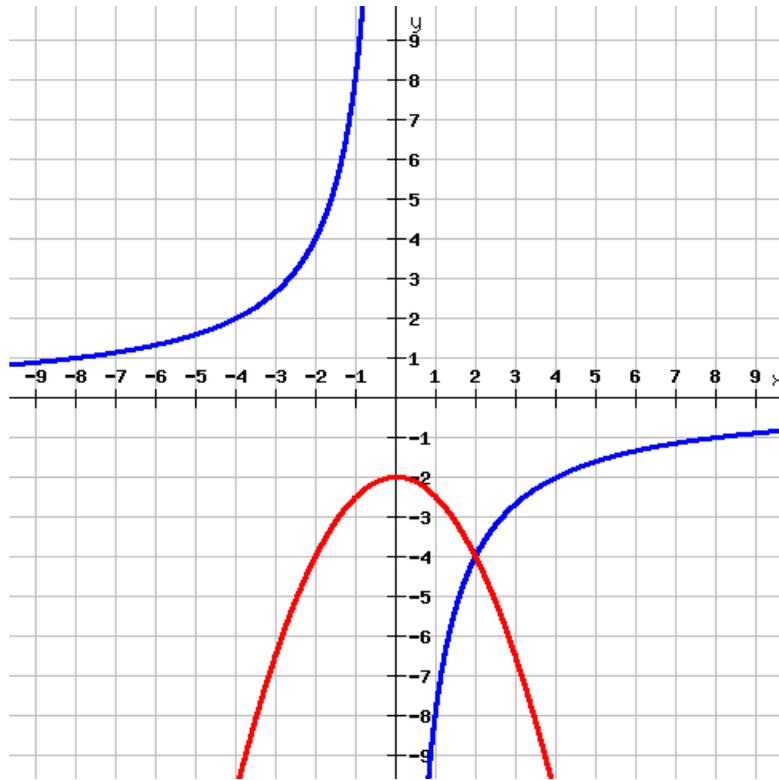
Determino innanzi tutto l'ascissa del punto che appartiene alla retta e ha ordinata 1, sostituendo alla y 1 e ricavando x :

$$1 = x - 7 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow (8; 1)$$

Sostituendo il punto appena determinato nell'equazione della parabola, determino il valore di k :

$$1 = 64k - 32 + 2k \Rightarrow 66k = 33 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

13. Disegna, in uno stesso riferimento, l'iperbole di equazione $y = -\frac{8}{x}$ e la parabola di equazione $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ e determina graficamente i loro punti di intersezione.



14. Determina per quale valore di x le seguenti funzioni hanno la stessa immagine:

$$f(x) = x^3 - \frac{(x-2)^2}{4} + 2 \quad g(x) = (x+1)^3 - \left(\frac{1}{2}x+1\right)^2 - 3x^2 - 5$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 - \frac{(x-2)^2}{4} + 2 = (x+1)^3 - \left(\frac{1}{2}x+1\right)^2 - 3x^2 - 5$$

$$x^3 - \frac{x^2 - 4x + 4}{4} + 2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - \frac{1}{4}x^2 - x - 1 - 3x^2 - 5$$

$$x^3 - \frac{1}{4}x^2 + x - 1 + 2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - \frac{1}{4}x^2 - x - 1 - 3x^2 - 5$$

$$x + x - 3x = 1 - 5 - 2 \Rightarrow x = 6$$