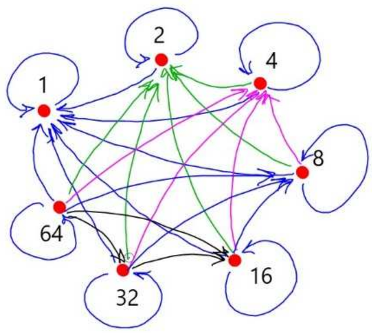
1. Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false:

	V	F
Una relazione non può essere sia riflessiva sia antiriflessiva	☑	☐
Una relazione che non gode della proprietà simmetrica è antisimmetrica	☐	☑
La relazione di incidenza tra le rette di un piano è transitiva	☐	☑
La relazione definita nell'insieme dei numeri naturali da $x\mathcal{R}y \iff x+y$ è dispari è antiriflessiva	☑	☐
$f: A \to B$ è una funzione se, a ogni $x \in A$, associa almeno un $y \in B$	☐	☑
$f(x)$ indica l'immagine dell'elemento x	☑	☐
Se una funzione è costante, tutti gli elementi del dominio hanno la stessa immagine	☑	☐
L'immagine di un elemento del dominio di una funzione appartiene al suo codominio	☑	☐
Ogni elemento del dominio di una funzione ha una sola immagine	☑	☐
Se una funzione è suriettiva allora è anche iniettiva	☐	☑
Se una funzione $f: A \to B$ è invertibile allora il suo codominio è B	☑	☐
Se una funzione è costante è anche biunivoca	☐	☑
Se una funzione è invertibile, ogni elemento del suo codominio ha una sola controimmagine	☑	☐
Se esiste una funzione biunivoca tra due insiemi finiti A e B, allora A e B hanno lo stesso numero di elementi	☑	☐
La corrispondenza che associa a ogni circonferenza il suo centro è una corrispondenza biunivoca	☐	☑
I punti che appartengono all'asse x hanno ordinata nulla	☑	☐

2. Considera, nell'insieme A dei divisori di 64, la relazione $x\mathcal{R}y \iff x$ è multiplo di y. Dopo averla rappresentata con un grafo, stabilisci di che tipo di relazione si tratta.

$$A = \{1; 2; 4; 8; 16; 32; 64\}$$



È una relazione riflessiva
È una relazione antisimmetrica
È una relazione transitiva

Si tratta di una **relazione di ordine largo totale**

3. Siano dati l'insieme $A = \{a; e; i; o; u\}$ e la relazione $\mathcal{R}$ definita in A. Sapendo che la relazione è riflessiva e simmetrica e che $a\mathcal{R}e$, $a\mathcal{R}o$, $a\mathcal{R}i$, $i\mathcal{R}o$, determina quali condizioni occorre aggiungere per poter affermare, sotto queste ipotesi, che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza.

$e\mathcal{R}o$ (oppure $o\mathcal{R}e$) e $e\mathcal{R}i$ (oppure $i\mathcal{R}e$)

4. Data la funzione $f: x \to x+2$ con $x \in \mathbb{N}$:
determina la controimmagine di 5: $f(x) = 5 \quad \Rightarrow \quad x+2=5 \quad \Rightarrow \quad x = \mathbf{3}$
determina l'immagine di 11: $f(11) = 11 + 2 = \mathbf{13}$
stabilisci se 1 appartiene al codominio di f:
$f(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad x+2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \notin \mathbb{N}$ perciò **non** appartiene al dominio

5. È data una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f(x) = x + 6$. Qual è il codominio della funzione?

$$\boldsymbol{C = \{y \in \mathbb{N} \mid y \geq 6\}}$$

6. Considera le seguenti funzioni da A a B e stabilisci se sono iniettive o suriettive:

A	B		Iniettiva?	Suriettiva?
$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{-1, 0, 1, 2\}$	$f(1) = 2; f(2) = 0; f(3) = 2; f(4) = -1$	**NO**	**NO**
$\{a, b, c, d\}$	$\{a, b, c\}$	$f(a) = c; f(b) = a; f(c) = b; f(d) = c$	**NO**	**Sì**
$\{-2, -1, 0, 1\}$	$\{-1, 0, 1, 2, 3\}$	$f(-2) = 0; f(-1) = 1; f(0) = 2; f(1) = 3$	**Sì**	**NO**
$\{-1, 0, 1\}$	$\{0, 1, 2\}$	$f(-1) = 2; f(0) = 1; f(1) = 0$	**Sì**	**Sì**

7. Considera l'insieme $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e la funzione $f: A \to A$ così definita:

$$f(0) = 3, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 0, \quad f(3) = 1$$

$$(f \circ f)(0) = f(f(0)) = f(3) = \mathbf{1} \qquad (f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(0) = \mathbf{3}$$

8. Date le funzioni $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2 - 1$, determina:

$$(f \circ g)(x) = f(x^2 - 1) = x^2 - 1 + 1 = \boldsymbol{x^2} \qquad (g \circ f)(x) = g(x + 1) = (x + 1)^2 - 1 = \boldsymbol{x^2 + 2x}$$

9. Trova $f\left(f(f(\dots f(x)\dots))\right)$, dove l'espressione contiene 97 funzioni da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$, sapendo che:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se\ x = 2n + 1\ con\ n \in \mathbb{N} \\ 1 & se\ x = 2n\ con\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Nel caso in cui x sia un numero pari, applicando due volte la funzione, otteniamo: $f(f(x)) = f(1) = 0$, quindi applicando la funzione 97 volte (ovvero un numero dispari di volte), otteniamo: $f\left(f(f(\dots f(pari)\dots))\right) = f(0) = \mathbf{1}$.

Nel caso in cui x sia un numero dispari, applicando due volte la funzione, otteniamo: $f(f(x)) = f(0) = 1$, quindi applicando la funzione 97 volte (ovvero un numero dispari di volte), otteniamo: $f\left(f(f(\dots f(dispari)\dots))\right) = f(1) = \mathbf{0}$.

10. Osserva il grafico della funzione definita a tratti e deduci i dati richiesti:

Dominio: $\boldsymbol{]-\infty; 6[\, \cup\,]6; 12]}$

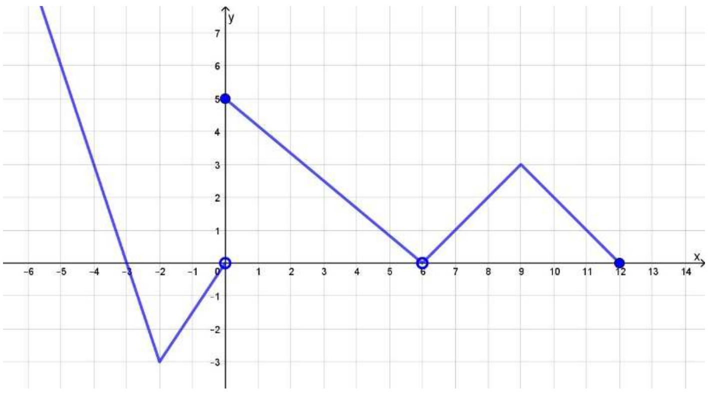
Codominio: $\boldsymbol{[-3; +\infty[}$

$f(x) > 0$: $\boldsymbol{]-\infty; -3[\, \cup\, [0; 6[\, \cup\,]6; 12[}$

$f(3) = \boldsymbol{\frac{5}{2}}$ $\qquad f(6) = \boldsymbol{6 \notin D}$

$f(9) = \mathbf{3}$ $\qquad f(0) = \mathbf{5}$

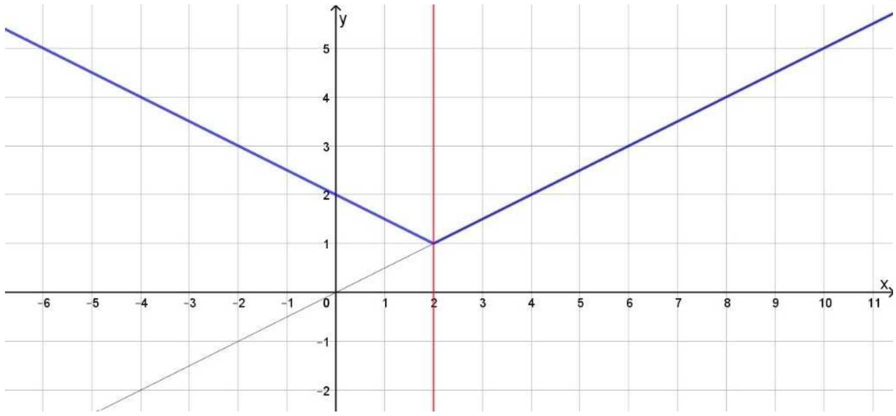
$f(x) = 1$: $x = \boldsymbol{-\frac{10}{3}}$; $x = \boldsymbol{\frac{24}{5}}$; $x = \mathbf{7}$; $x = \mathbf{11}$



11. Rappresenta la funzione: $y = \left|\frac{1}{2}x - 1\right| + 1$.

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x & x \geq 2 \\ 2 - \dfrac{1}{2}x & x < 2 \end{cases}$$

Posso rappresentare la funzione $y = \frac{1}{2}x$ per $x \geq 2$ e, visto che l'espressione in valore assoluto cambia segno in $x = 2$, posso fare la simmetrica di questa semiretta rispetto alla retta $x = 2$.



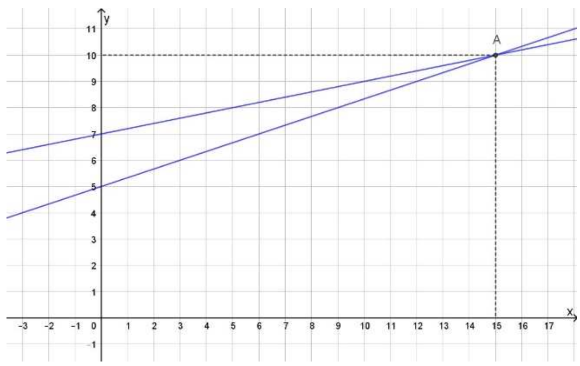
12. Dopo averlo tradotto in equazioni, risolvi graficamente il seguente problema:

Determina due numeri x e y, con $x > y$, sapendo che la differenza tra il quintuplo del minore e il maggiore dà 35 e che la differenza tra il triplo del minore e il maggiore dà 15.

$$\begin{cases} 5y - x = 35 \\ 3y - x = 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{1}{5}x + 7 \\ y = \dfrac{1}{3}x + 5 \end{cases}$$

Dal grafico posso dedurre il valore dei numeri richiesti:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 15} \\ \boldsymbol{y = 10} \end{cases}$$

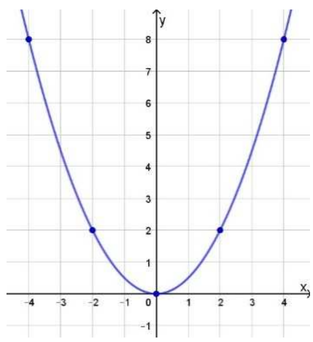


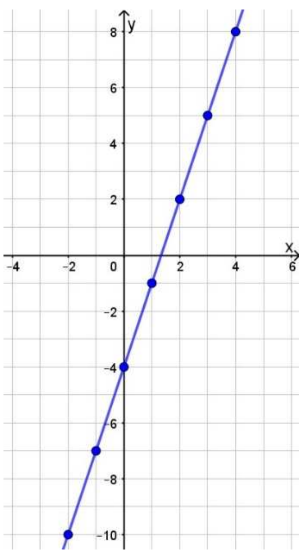
13. Completa:

x	-6	-4	-2	0	2	4	6
y	18	8	2	0	2	8	18

Posso notare che si mantiene costante il rapporto $\frac{y}{x^2} = \frac{1}{2}$, quindi si tratta di una proporzionalità quadratica diretta, ovvero: $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x^2}$.

Il suo grafico è quello di una parabola.





x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-10	-7	-4	-1	2	5	8

Dal grafico posso notare che si tratta di una funzione lineare. L'ordinata all'origine è − 4, ovvero nell'equazione generica $y = ax + b$, $b = -4$. Posso ricavare il coefficiente angolare a, sostituendo due coordinate qualsiasi:

$$a = \frac{y - b}{x} = \frac{-1 + 4}{1} = 3$$

e l'equazione è: $\boldsymbol{y = 3x - 4}$.