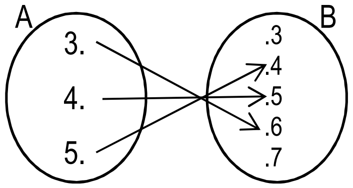
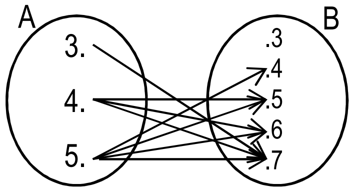
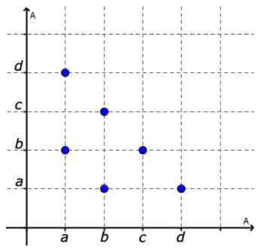
1. Dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{N} | 2 < x < 6\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} | 3 \leq x \leq 7\}$, per ognuna delle seguenti relazioni $\mathcal{R}$ in $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ completa la seguente tabella:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y = 9 \qquad\qquad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy \geq 20$$

Rappresentazione per elencazione	Rappresentazione sagittale	Dominio e Codominio	Relazione inversa (per elencazione)
$\mathcal{R} = \{(3,6); (4,5); (5,4)\}$		$D = \{3, 4, 5\}$ $C = \{4, 5, 6\}$	$\mathcal{R}^{-1} = \{(6,3); (5,4); (4,5)\}$
$\mathcal{R} = \{(3,7); (4,5); (4,6); (4,7); (5,4); (5,5); (5,6); (5,7)\}$		$D = \{3, 4, 5\}$ $C = \{4, 5, 6, 7\}$	$\mathcal{R}^{-1} = \{(7,3); (5,4); (6,4); (7,4); (4,5); (5,5); (6,5); (7,5)\}$

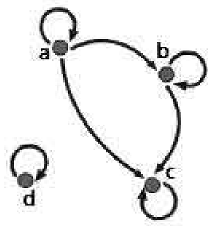
2. Analizza le proprietà delle relazioni, definite in $A = \{a, b, c, d\}$, che hanno le seguenti rappresentazioni:



Antiriflessiva, simmetrica

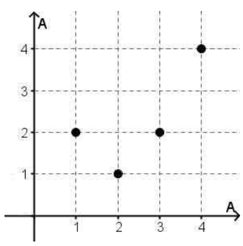
A \ A	a	b	c	d
a	X			X
b			X	X
c			X	X
d				X

Antisimmetrica, Transitiva

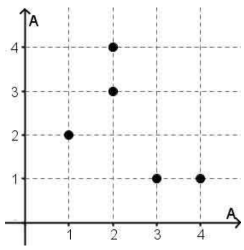


Riflessiva, Antisimmetrica, Transitiva

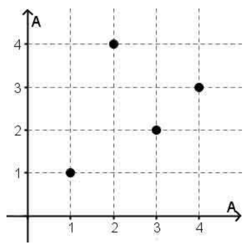
3. Stabilisci per ogni diagramma cartesiano se la relazione rappresentata è una funzione e, in tal caso, se è iniettiva o suriettiva:



Funzione, né iniettiva, né suriettiva

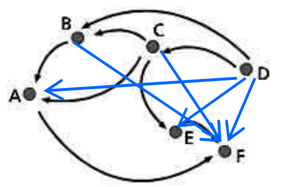


Non è una funzione



Funzione, iniettiva e suriettiva

4. In una sala giochi, sei amici devono decidere chi giocherà l'ultima partita. Decidono che userà l'unico gettone rimasto chi ha vinto il maggior numero di volte a quel gioco. Il grafo qui a lato descrive la relazione "x ha vinto più partite di y", ma è incompleto. Disegna le frecce mancanti utilizzando le proprietà della relazione e rispondi alle domande.
Chi giocherà l'ultima partita? **D**
Chi ha vinto il minor numero di volte? **F**



5. Considera la relazione $\mathcal{R}$ nell'insieme $\mathbb{Z}$ definita da $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y^2$. Questa relazione è una funzione da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$? Motiva la tua risposta.
Non è una funzione, perché, ad esempio, abbiamo le coppie $(4, -2)$ e $(4, 2)$.

6. Per ciascuna delle seguenti funzioni f definite in A, determina il codominio C e stabilisci se $f: A \to C$ è una funzione invertibile. In caso affermativo, scrivi l'espressione analitica della corrispondente funzione inversa.

$f: x \to \frac{|x-1|}{x-1}$ $\quad A = \{-2, -1, 0, 2, 3\}$ $\quad C = \{\mathbf{-1, 1}\}$

È invertibile? **NO**

$f: x \to 3x - 2$ $\quad A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ $\quad C = \{\mathbf{-8, -5, -2, 1, 4}\}$

È invertibile? **Sì** $\quad f^{-1}(y) = \frac{y+2}{3}$

7. Data la funzione $f: x \to x + 2$ con $x \in \mathbb{N}$, determina:

la controimmagine di 6: **4**
la controimmagine di 20: **18**
1 appartiene al codominio di f? **NO**

8. Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$, $C = \{2, 3\}$ e le funzioni $f: A \to B$ e $g: B \to C$ tali che:

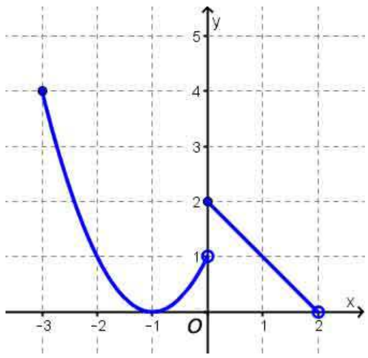
$$f(1) = 4 \qquad f(2) = 3 \qquad g(3) = 3 \qquad g(4) = 2$$

Calcola:

$$f^{-1}(g(3)) = f^{-1}(3) = \mathbf{2} \qquad f(g(4)) = f(2) = \mathbf{3}$$

$$g(f(2)) = g(3) = \mathbf{3} \qquad g(f(1)) = g(4) = \mathbf{2}$$

9. Una funzione ha il grafico rappresentato in figura. Completa:



Dominio $D = \{x \in \mathbb{R} | -3 \le x < 2\}$
Codominio $C = \{y \in \mathbb{R} | 0 \le y \le 4\}$
$f(2) =$ ***non esiste*** $\qquad f(0) = \mathbf{2}$
$f(\mathbf{-3}) = 4$ $\qquad f(\mathbf{1}) = 1$ oppure $f(\mathbf{-2}) = 1$
2 ha due **controimmagini**
$\frac{1}{2}$ ha tre controimmagini
la funzione è iniettiva nell'intervallo $\mathbf{0 \le x < 2}$

10. Determina il dominio delle funzioni aventi le seguenti equazioni:

$f(x) = \frac{5}{x-1}$ $\quad \mathbf{D: x \neq 1}$ $\qquad f(x) = \frac{7}{|x|+1}$ $\quad \mathbf{D = \mathbb{R}}$

$f(x) = \frac{5x-2}{25x^2-4} = \frac{5x-2}{(5x-2)(5x+2)}$ $\quad \mathbf{D: x \neq \pm\frac{2}{5}}$ $\qquad f(x) = \frac{5x}{x^3+1} = \frac{5x}{(x+1)(x^2-x+1)}$ $\quad \mathbf{D: x \neq 1}$

$f(x) = \frac{3x+1}{2x^2-5x+3} = \frac{3x+1}{(2x-3)(x-1)}$ $\quad \mathbf{D: x \neq \frac{3}{2} \wedge x \neq 1}$

11. Data la funzione $f(x) = x^2 + ax - \frac{1}{2}$, si sa che è $f(1) = \frac{5}{2}$. Quanto deve valere a?

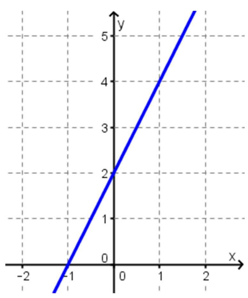
Calcolo $f(1)$ e lo pongo uguale a $\frac{5}{2}$. In questo modo, determino il valore del parametro:

$$f(1) = 1 + a - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \qquad a = -1 + \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \qquad a = \mathbf{2}$$

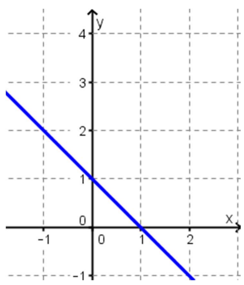
12. Considera le seguenti tabelle, stabilisci il tipo di proporzionalità che sussiste tra x e y e scrivi l'equazione della funzione di tale proporzionalità.

							Proporzionalità	Equazione
x	$-\frac{1}{10}$	-1	0	1	2	$\frac{1}{5}$	Diretta	$\boldsymbol{y = -\frac{5}{4}x}$
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{4}$		
x	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	Quadratica diretta	$\boldsymbol{y = 2x^2}$
y	18	8	2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{9}$		
x	-6	-3	-2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	Inversa	$\boldsymbol{y = -\frac{12}{x}}$
y	2	4	6	-12	-24	-18		

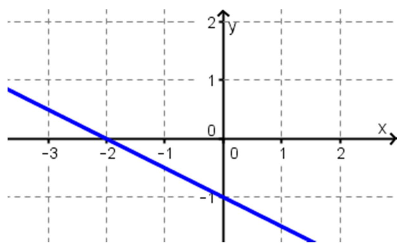
13. Scrivi l'equazione associata a ogni grafico:



$\boldsymbol{y = 2x + 2}$



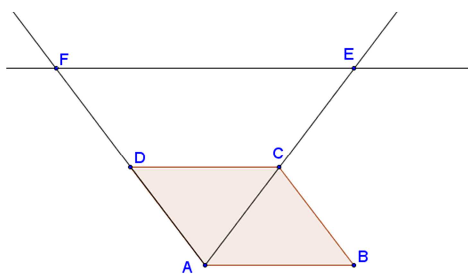
$\boldsymbol{y = -x + 1}$



$\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x - 1}$

14. Costruisci un parallelogramma ABCD in cui la diagonale AC sia congruente al lato AD. Sia E il punto del prolungamento di AC, oltre C, tale che sia $AE \cong 2\,AC$ e da E conduci la parallela al lato CD che incontri in F il prolungamento del lato AD. Dimostra che $EF \cong DC + AB$ e che $AF \cong 2\,BC$.

Ipotesi: ABCD parallelogrammo $AC \cong AD$
A, C, E allineati $AE \cong 2\,AC$
A, D, F allineati $EF \parallel DC$



Tesi: $EF \cong DC + AB$
$AF \cong 2\,BC$

Dimostrazione:
Considero il triangolo AEF. Per ipotesi, C è il punto medio del lato AE ($AE \cong 2\,AC$) e, considerato che $EF \parallel DC$, posso applicare il teorema secondo il quale dato un triangolo e preso il punto medio di un lato (C), se tracciamo la parallela a un secondo lato ($EF \parallel DC$), questa incontrerà il terzo lato (AF) nel suo punto medio (D) e il segmento ottenuto sarà congruente a metà del secondo lato, ovvero: $DC \cong \frac{1}{2}FE$ cioè: $FE \cong 2\,DC$, ma $DC \cong AB$ perché lati opposti di un parallelogrammo, perciò:

$$FE \cong 2\,DC = DC + DC \cong DC + AB$$

Sempre per il teorema citato, $AF \cong AD + FD \cong 2\,AD \cong 2\,BC$ perché lati opposti di un parallelogrammo.