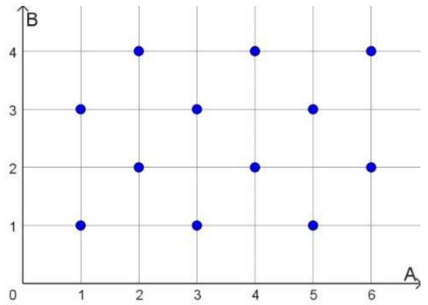
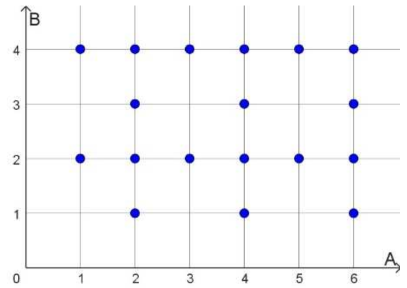
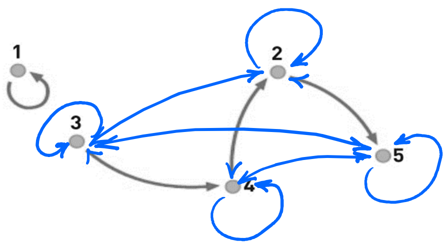
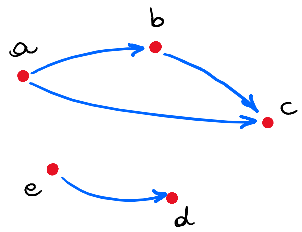
1. Dati gli insiemi A e B, per le relazioni $\Re$ in $A \times B$, hai la seguente rappresentazione nel piano cartesiano. Stabilisci di che relazione si tratta e determina dominio e codominio:

	$a \Re b \Leftrightarrow$	Dominio e Codominio
	$a + b$ è un numero pari	$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $C = \{1, 2, 3, 4\}$
	ab è un numero pari	$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $C = \{1, 2, 3, 4\}$

2. Completa la figura in modo che la relazione rappresentata sia riflessiva, simmetrica e transitiva.



3. Dato l'insieme $A = \{a, b, c, d, e\}$, costruisci il grafo di una relazione che abbia almeno la proprietà transitiva e quattro frecce.



4. Scrivi le proprietà della relazione $X \cap Y = X$, definita tra insiemi.

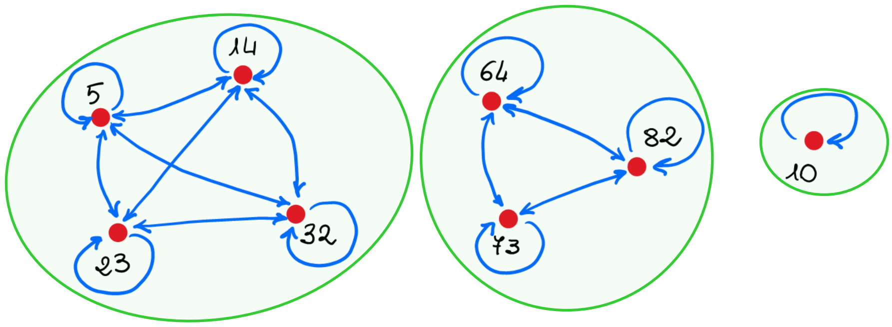
Scrivere $X \cap Y = X$ è come scrivere $X \subseteq Y$
$X \subseteq X$, perciò vale la **proprietà riflessiva**
$X \subseteq Y \quad \Rightarrow \quad Y \subseteq X$ se e solo se $X = Y$, perciò vale la **proprietà antisimmetrica**
Se $(X \subseteq Y \ e \ Y \subseteq Z) \Rightarrow X \subseteq Z$, perciò vale la **proprietà transitiva**

5. Nella famiglia di Andrea, Carlo è il più vecchio, Daniele è più vecchio di Enzo e Barbara, mentre Andrea è più vecchio di Daniele. Se Enzo è più vecchio di Barbara, stabilisci l'ordine di età dal più giovane al più vecchio componente della famiglia.

Carlo è il più vecchio, quindi in ordine di età dal più giovane al più vecchio, sarà l'ultimo.
Daniele è più vecchio di Enzo e Barbara, ma Enzo è più vecchio di Barbara, perciò abbiamo Barbara, Enzo e Daniele.
Siccome Andrea è più vecchio di Daniele, posso determinare l'ordine finale:

Barbara **Enzo** **Daniele** **Andrea** **Carlo**

6. In $A = \{5, 10, 14, 23, 32, 64, 73, 82\}$, la relazione $\mathfrak{R}$ è data da $a\mathfrak{R}b \iff$ la somma delle cifre di a è uguale alla somma delle cifre di b. Dopo aver rappresentato la relazione con un grafo, verifica che si tratta di una relazione di equivalenza e determinane le classi di equivalenza e l'insieme quoziente.



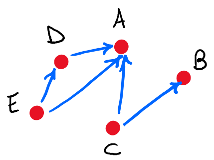
La relazione è

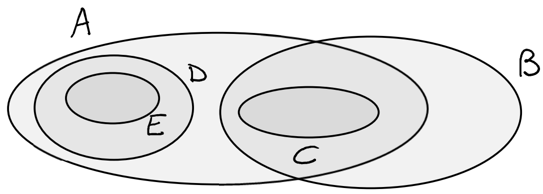
- **riflessiva**, visto che ogni numero ha la somma delle cifre uguale a quelle di sé stesso
- **simmetrica**, perché se la somma delle cifre di a è uguale alla somma delle cifre di b, anche la somma delle cifre di b è uguale alla somma delle cifre di a
- **transitiva**, perché se la somma delle cifre di a è uguale alla somma delle cifre di b e la somma delle cifre di b è uguale alla somma delle cifre di c, anche la somma delle cifre di a è uguale alla somma delle cifre di c.

Classi di equivalenza: $C_1 = \{5, 14, 23, 32\}$, $C_2 = \{64, 82, 73\}$ e $C_3 = \{10\}$.

L'insieme quoziente è: $Q = \{C_1, C_2, C_3\}$

7. Nel grafo è descritta la relazione $\subset$ fra alcuni insiemi. Disegna un diagramma di Eulero-Venn con insiemi tali da soddisfare la relazione.





8. Determina il dominio delle seguenti funzioni definite in $\mathbb{R}$:

$y = 4x + 2$ $\quad$ $\boldsymbol{D = \mathbb{R}}$

$y = \frac{5x}{25x^2-1} = \frac{5x}{(5x-1)(5x+1)}$ $\quad$ $\boldsymbol{D = \mathbb{R} - \left\{\pm\frac{1}{5}\right\}}$

$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad$ $\boldsymbol{D: x > 0}$

$y = 1 + \frac{x}{x^3-x} = 1 + \frac{x}{x(x-1)(x+1)}$ $\quad$ $\boldsymbol{D = \mathbb{R} - \{0;\ \pm 1\}}$

9. Completa, scrivendo l'espressione analitica della funzione ottenuta:

$x \longrightarrow$	eleva al quadrato	$\to \boldsymbol{x^2} \to$	aggiungi 3	$\to \boldsymbol{x^2+3} \to$	dividi per 2	$\to \boldsymbol{\frac{x^2+3}{2}}$
$x \longrightarrow$	aggiungi 3	$\to \boldsymbol{x+3} \to$	dividi per 2	$\to \boldsymbol{\frac{x+3}{2}} \to$	eleva al quadrato	$\to \boldsymbol{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2}$
$x \longrightarrow$	dividi per 2	$\to \boldsymbol{\frac{x}{2}} \to$	eleva al quadrato	$\to \boldsymbol{\frac{x^2}{4}} \to$	aggiungi 3	$\to \boldsymbol{\frac{x^2}{4}+3}$

10. Stabilisci se i seguenti punti appartengono al grafico $\mathcal{G}$ della funzione $y = \frac{2x}{x-1}$:

$A(1;0) \notin \mathcal{G}$ $\quad B(2;4) \in \mathcal{G}$ $\quad C(-1;1) \in \mathcal{G}$ $\quad D(0;-1) \notin \mathcal{G}$ $\quad E(3;3) \in \mathcal{G}$

11. Date le funzioni $f: x \to 4x+2$, $g: x \to x^2$ e $h: x \to \frac{2x}{x+1}$ con $x \in \mathbb{R}$, determina:

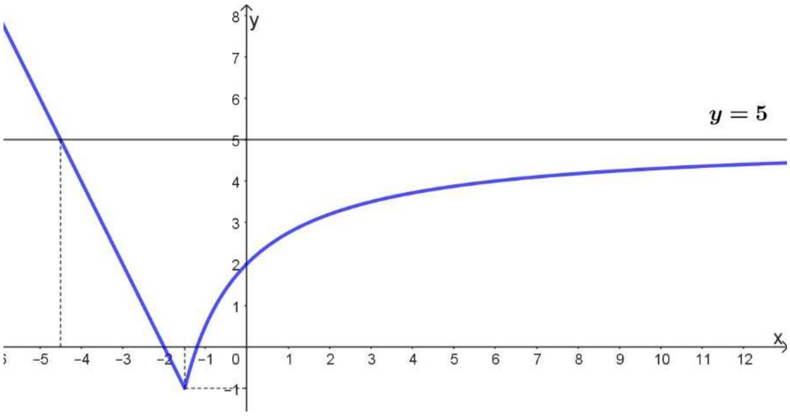
$$f\left(g\left(h(3)\right)\right) = f\left(g\left(\frac{3}{2}\right)\right) = f\left(\frac{9}{4}\right) = \mathbf{11} \qquad g\left(h\left(f(-1)\right)\right) = g\left(h(-2)\right) = g(4) = \mathbf{16}$$

$$f \circ g\,(x) = f(x^2) = 4x^2 + 2 \qquad f \circ h(x) = f\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \frac{8x}{x+1} + 2$$

Risolvi l'equazione: $\left(f \circ g\,(x)\right) - 4x^2 = f \circ h(x)$

$$4x^2 + 2 - 4x^2 = \frac{8x}{x+1} + 2 \qquad \frac{8x}{x+1} = 0 \qquad \boldsymbol{x = 0}$$

12. Osserva il grafico della funzione definita a tratti e deducine i dati richiesti:



Dominio: $\boldsymbol{D = \mathbb{R}}$

Codominio: $\boldsymbol{C = [-1;\ +\infty)}$

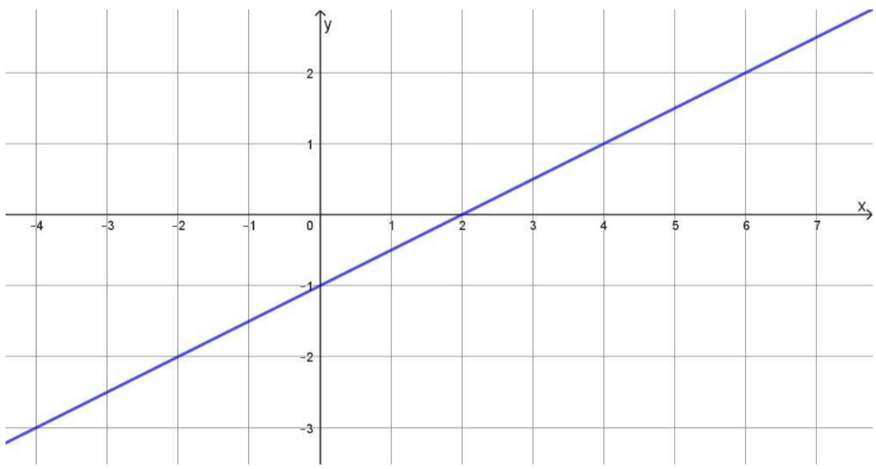
$f\left(-\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}\right) = 5$

$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \mathbf{-1}$

$f(-2) = \mathbf{0}$

$f(0) = \mathbf{2}$

13. Considera la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che fa corrispondere a un numero la sua metà diminuita di 1. Scrivi l'espressione analitica della funzione e rappresentala graficamente nel piano cartesiano.



$f(x) = \frac{1}{2}x - 1$

Calcola:

$f(-3) = -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$

$f(0) = \mathbf{-1}$

Determina la controimmagine di 7:

$\frac{1}{2}x - 1 = 7 \qquad \Rightarrow$

$\frac{1}{2}x = 8 \qquad x = \mathbf{16}$