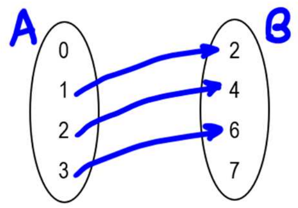
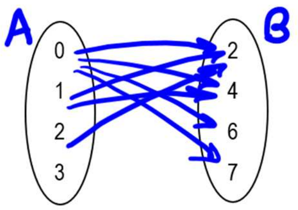
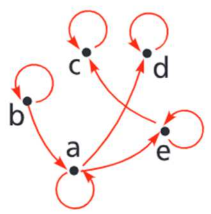
1. Dati gli insiemi $A = \{a \in \mathbb{N} | a \leq 3\}$ e $B = \{2, 4, 6, 7\}$, per ognuna delle seguenti relazioni $\mathcal{R}$ in $A \times B$ completa la seguente tabella:

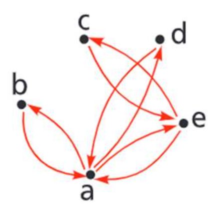
$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}b \qquad\qquad a\mathcal{R}b \Leftrightarrow ab \leq 5$$

Rappresentazione per elencazione	Rappresentazione sagittale	Dominio e Codominio	Relazione inversa (per elencazione)
$\mathcal{R} = \{(1; 2); (2; 4); (3; 6)\}$		$D = \{1; 2; 3\}$ $C = \{2; 4; 6\}$	$\mathcal{R}^{-1} = \{(2; 1); (4; 2); (6; 3)\}$
$\mathcal{R} = \{(0; 2); (0; 4); (0; 6); (0; 7); (1; 2); (1; 4); (2; 2)\}$		$D = \{0; 1; 2\}$ $C = B$	$\mathcal{R}^{-1} = \{(2; 0); (4; 0); (6; 0); (7; 0); (2; 1); (4; 1); (2; 2)\}$

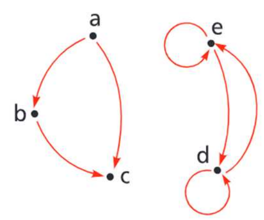
2. Analizza le proprietà delle relazioni, definite in $A = \{a, b, c, d, e\}$, che hanno le seguenti rappresentazioni:



Riflessiva, Antisimmetrica

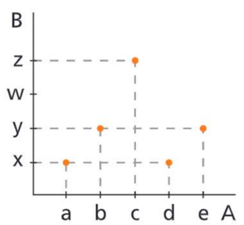


Antiriflessiva, Simmetrica

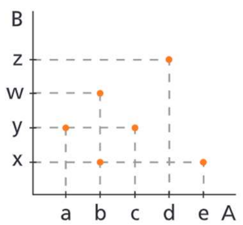


Transitiva

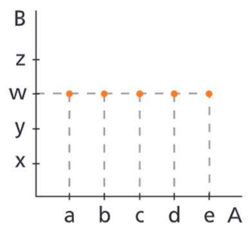
3. Stabilisci per ogni diagramma cartesiano se la relazione rappresentata è una funzione e, in tal caso, se è iniettiva o suriettiva:



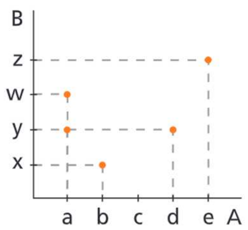
Funzione, non iniettiva né suriettiva



Non funzione



Funzione, non iniettiva né suriettiva

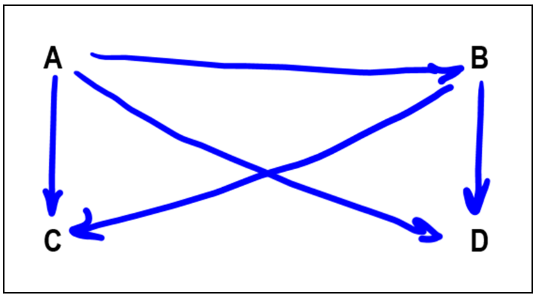


Non funzione

4. Quattro amici, Andrea (A), Bruno (B), Carlo (C) e Dario (D), si sfidano a un gioco in cui o si vince o si perde. Sia data la relazione:

$$a\mathcal{R}b \quad \leftrightarrow \quad a \; ha \; perso \; contro \; b$$

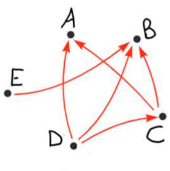
Rappresenta la relazione con un grafo, sapendo che Andrea ha perso contro tutti, mentre Bruno ha perso contro Carlo e Dario.
Quante partite sono state giocate? **5**

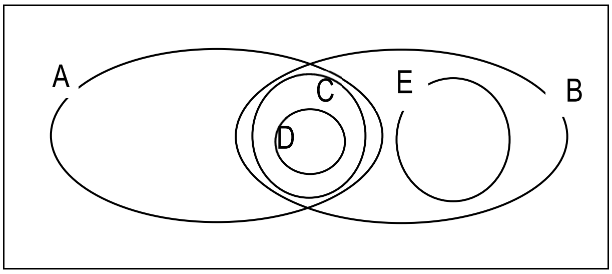


Stabilisci se la relazione è di ordine e, in caso affermativo, specifica se è di ordine stretto o largo, totale o parziale.

La relazione è antiriflessiva, antisimmetrica e transitiva, quindi è una relazione di ordine stretto parziale.

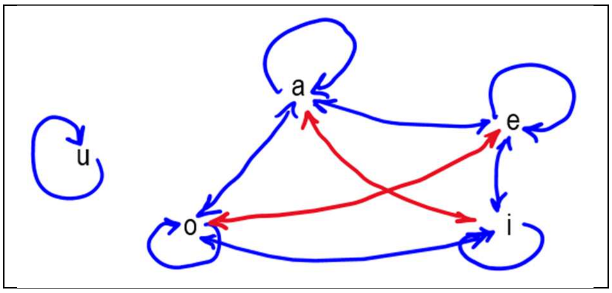
5. Nel grafo è descritta la relazione $\subset$ fra alcuni insiemi. Disegna un diagramma di Eulero-Venn con insiemi tali da soddisfare la relazione.





6. Sia A l'insieme delle vocali e sia $\mathcal{R}$ una relazione definita in A. Sapendo che $\mathcal{R}$ è riflessiva e simmetrica e che $a\mathcal{R}e$, $a\mathcal{R}o$, $e\mathcal{R}i$, $i\mathcal{R}o$, dopo aver rappresentato in un grafo la relazione, determina quali condizioni occorre aggiungere per poter affermare, sotto queste ipotesi, che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza.

Bisogna aggiungere $\boldsymbol{e\mathcal{R}o}$ e quindi $\boldsymbol{o\mathcal{R}e}$, $\boldsymbol{a\mathcal{R}i}$ e $\boldsymbol{i\mathcal{R}a}$



7. Dato l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e la relazione $\mathcal{R} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (3,2), (3,4), (3,3), (2,4), (4,4)\}$, stabilisci di quali proprietà gode.

Gode della proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Che tipo di relazione è? **Una relazione di ordine largo totale.**

8. Dall'esame del grafico della funzione rappresentato in figura, deduci:

Dominio: $\mathbb{R}$

Codominio: $\boldsymbol{\{y \in \mathbb{R} | \; y > -1\}}$

$f(7) = \mathbf{2}$

$f(4) = \; \mathbf{1}$

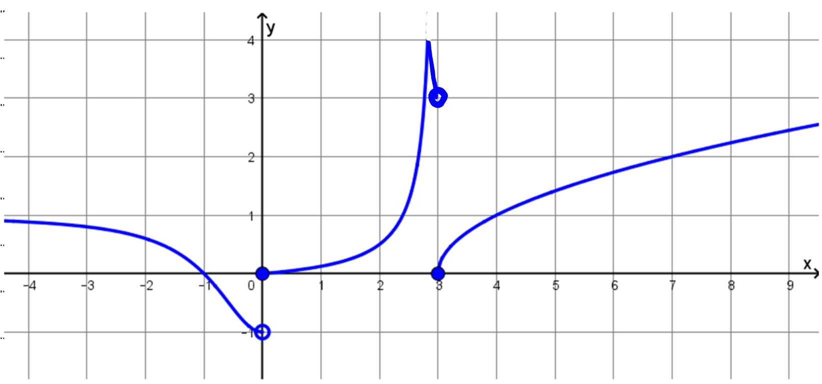
Immagine di 3: $\mathbf{0}$

Controimmagine di 0: $\mathbf{-\;1, 0, 3}$

Controimmagine di –1: **non esiste**

Iniettiva? **NO**

Suriettiva? **NO**



9. Per ciascuna delle seguenti funzioni f definite in A, determina il codominio C e stabilisci se $f: A \to C$ è una funzione invertibile. In caso affermativo, scrivi l'espressione analitica della corrispondente funzione inversa.

$f: x \to 2x + 1$ $\quad A = \{-2, -1, 0, 2, 3\}$ $\quad C = \{\mathbf{-3, -1, 1, 5, 7}\}$

È invertibile? **Sì** $\quad f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$

$f: x \to \frac{x^2}{|x|+1}$ $\quad A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ $\quad C = \left\{\frac{4}{3}; \frac{1}{2}; 0\right\}$

È invertibile? **NO** $\quad f^{-1}(y) = ///$

10. Date le funzioni $f: x \to 2x - 1$, $g: x \to x^2 - 1$ e $h: x \to \frac{x}{x-1}$ con $x \in \mathbb{R}$, determina:

$f\left(g\left(h(2)\right)\right) = f(g(\mathbf{2})) = f(\mathbf{3}) = \mathbf{5}$

$g\left(h\left(f(0)\right)\right) = g(h(\mathbf{-1})) = g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$

$f \circ g\,(x) = f(\boldsymbol{x^2 - 1}) = 2(x^2 - 1) - 1 = \mathbf{2x^2 - 3}$

$g \circ f(x) = g(\mathbf{2x - 1}) = (2x - 1)^2 - 1 = 4x^2 - 4x + 1 - 1 = \mathbf{4x^2 - 4x}$

Risolvi l'equazione: $2\left(f \circ g\,(x)\right) - \left(g \circ f(x)\right) + 2x = 0$

$$2(2x^2 - 3) - (4x^2 - 4x) + 2x = 0$$

$$4x^2 - 6 - 4x^2 + 4x + 2x = 0 \qquad 6x = 6 \qquad x = \mathbf{1}$$

11. Determina il dominio delle funzioni aventi le seguenti equazioni:

$f(x) = \frac{1}{x} - 2$ $\quad \boldsymbol{D = \mathbb{R} - \{0\}}$

$f(x) = \frac{5}{|x|+1}$ $\quad \boldsymbol{D = \mathbb{R}}$ (il denominatore è sempre diverso da 0, in quanto somma di due quantità positive)

$f(x) = \frac{3x-1}{9x^2-1}$ $\quad 9x^2 - 1 \neq 0 \quad (3x - 1)(3x + 1) \neq 0 \quad \boldsymbol{D = \mathbb{R} - \left\{\pm\frac{1}{3}\right\}}$

$f(x) = \frac{2x}{x^3-1}$ $\quad x^3 - 1 \neq 0 \quad (x - 1)(x^2 + x + 1) \neq 0 \quad \boldsymbol{D = \mathbb{R} - \{1\}}$

$f(x) = \frac{1}{x^3-4x^2+4x-16}$ $\quad x^2(x - 4) + 4(x - 4) \neq 0 \quad (x - 4)(x^2 + 4) \neq 0 \quad \boldsymbol{D = \mathbb{R} - \{4\}}$

12. La funzione lineare $f(x) = mx + k$ è tale che $f(1) = -2$ e $f(-2) = 11$. Qual è la variazione del valore di $f(x)$ quando x aumenta di 2? (descrivi e motiva il procedimento)

$$m = \frac{f(1) - f(-2)}{1 + 2} = \frac{-2 - 11}{3} = -\frac{13}{3}$$

$$-\frac{13}{3} = \frac{f(x + 2) - f(x)}{x + 2 - x} \qquad f(x + 2) - f(x) = -\frac{26}{3}$$

Potremmo anche tradurre il problema con le proporzioni: quando c'è un aumento di 3, la funzione diminuisce di 13, quindi quando c'è un aumento di 2:

$$3 : (-13) = 2 : x \qquad x = \frac{-13 \cdot 2}{3} = -\frac{26}{3}$$

13. La grandezza y è direttamente proporzionale al cubo della grandezza x e, per $x = 1$ si ha $y = 4$. Quindi, se $x = \frac{1}{2}$, y è uguale a:

Se la grandezza y è direttamente proporzionale al cubo della grandezza x, otteniamo: $\frac{y}{x^3} = cost.$
Possiamo determinare questa costante sostituendo i valori dati: $\frac{4}{1^3} = 4$, perciò otteniamo la relazione: $y = 4x^3$. Sostituendo $x = \frac{1}{2}$, otteniamo:

$$y = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 4 \cdot \frac{1}{8} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

14. Data la funzione $f(x) = \frac{4}{x}$, determina $f \circ f$ (una composizione di f con se stessa) e $f \circ f \circ f$ (due composizioni). Considera poi la funzione $g(x)$ che ottieni componendo f con se stessa sedici volte. Quanto vale $g(16)$?

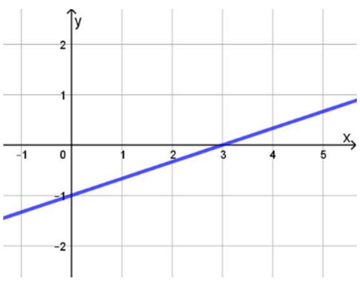
$f \circ f(x) = f\left(\frac{4}{x}\right) = \frac{4}{\frac{4}{x}} = x$ ovvero con una composizione, ottengo l'identità
$f \circ f \circ f(x) = f \circ f\left(\frac{4}{x}\right) = f(x) = \frac{4}{x}$ ovvero con due composizioni, è come se applicasse semplicemente la funzione.
Quindi, applicando la funzione 16 volte, ovvero un numero pari di volte, ottengo:

$$g(x) = f(x) = \frac{4}{x} \qquad\qquad g(16) = \frac{4}{16} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

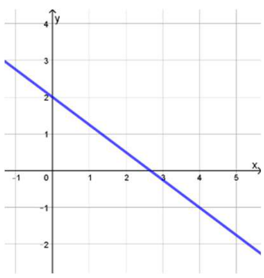
15. Considera le seguenti tabelle, stabilisci il tipo di proporzionalità che sussiste tra x e y e scrivi l'equazione della funzione di tale proporzionalità.

							Proporzionalità	Equazione
x	-3	$-\frac{3}{2}$	-1	0	3	6	**Proporzionalità quadratica diretta**	$\mathbf{y = \frac{2}{3}x^2}$
y	6	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	0	6	24		
x	-8	-4	$-\frac{3}{2}$	-1	2	3	**Proporzionalità inversa**	$\mathbf{y = -\frac{24}{x}}$
y	3	6	16	24	-12	-8		

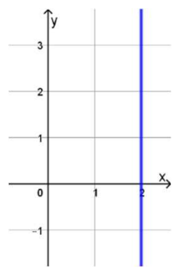
16. Scrivi l'equazione associata a ogni grafico:



$\mathbf{y = \frac{1}{3}x - 1}$



$\mathbf{y = -\frac{3}{4}x + 2}$



$\mathbf{x = 2}$

17. Dato $A = \frac{B^2}{3C}$

Se B raddoppia e C rimane costante A **quadruplica**

Se C raddoppia e B rimane costante A **dimezza**

Se C dimezza e B rimane costante A **raddoppia**

Se B raddoppia e C raddoppia A **raddoppia**