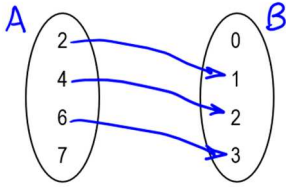
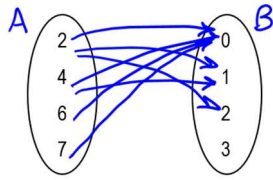


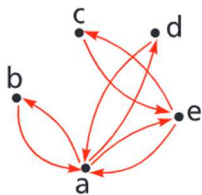
1. Dati gli insiemi $A = \{2, 4, 6, 7\}$ e $B = \{a \in \mathbb{N} | a \leq 3\}$, per ognuna delle seguenti relazioni \mathcal{R} in $A \times B$ completa la seguente tabella:

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a = 2b$$

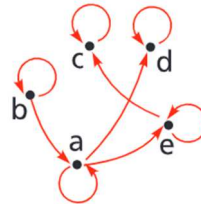
$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow ab \leq 5$$

Rappresentazione per elencazione	Rappresentazione sagittale	Dominio e Codominio	Relazione inversa (per elencazione)
$\mathcal{R} = \{(2; 1); (4; 2); (6; 3)\}$		$D = \{2; 4; 6\}$ $C = \{1; 2; 3\}$	$\mathcal{R}^{-1} = \{(1; 2); (2; 4); (3; 6)\}$
$\mathcal{R} = \{(2; 0); (4; 0); (6; 0); (7; 0); (2; 1); (4; 1); (2; 2)\}$		$D = A$ $C = \{0; 1; 2\}$	$\mathcal{R}^{-1} = \{(0; 2); (0; 4); (0; 6); (0; 7); (1; 2); (1; 4); (2; 2)\}$

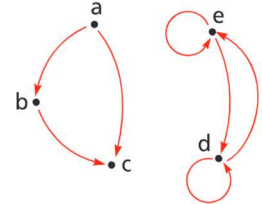
2. Analizza le proprietà delle relazioni, definite in $A = \{a, b, c, d, e\}$, che hanno le seguenti rappresentazioni:



Transitiva

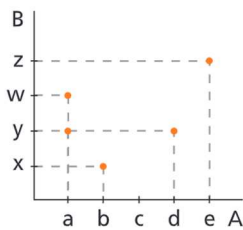


Riflessiva, Antisimmetrica

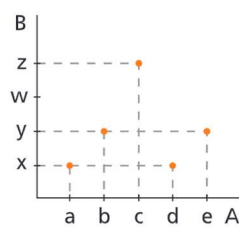


Antiriflessiva, Simmetrica

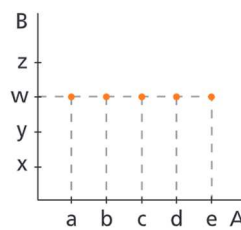
3. Stabilisci per ogni diagramma cartesiano se la relazione rappresentata è una funzione e, in tal caso, se è iniettiva o suriettiva:



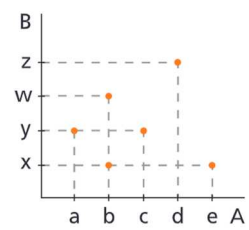
Non funzione



Funzione, non iniettiva né suriettiva



Funzione, non iniettiva né suriettiva



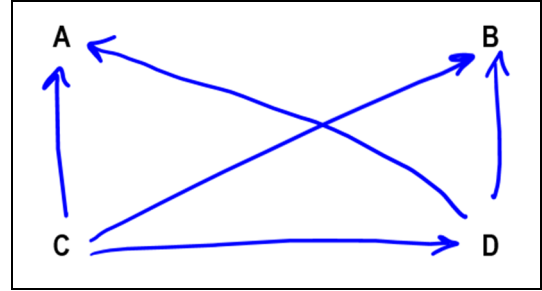
Non funzione

4. Quattro amici, Andrea (A), Bruno (B), Carlo (C) e Dario (D), si sfidano a un gioco in cui o si vince o si perde. Sia data la relazione:

$$aRb \leftrightarrow a \text{ ha perso contro } b$$

Rappresenta la relazione con un grafo, sapendo che Carlo ha perso contro tutti, mentre Dario ha perso contro Andrea e Bruno.

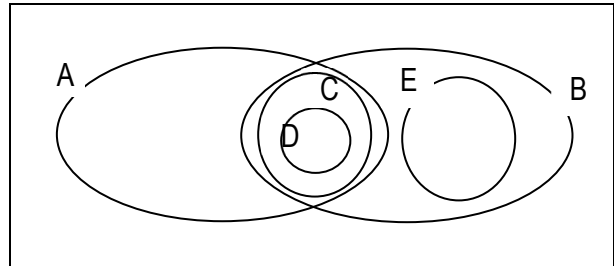
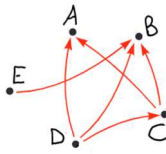
Quante partite sono state giocate? **5**



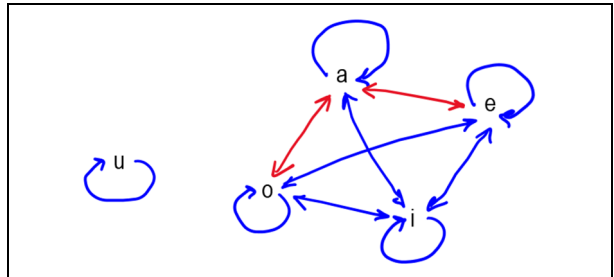
Stabilisci se la relazione è di ordine e, in caso affermativo, specifica se è di ordine stretto o largo, totale o parziale.

La relazione è antiriflessiva, antisimmetrica e transitiva, quindi è una relazione di ordine stretto parziale.

5. Nel grafo è descritta la relazione \subset fra alcuni insiemi. Disegna un diagramma di Eulero-Venn con insiemi tali da soddisfare la relazione.



6. Sia A l'insieme delle vocali e sia \mathcal{R} una relazione definita in A. Sapendo che \mathcal{R} è riflessiva e simmetrica e che oRe , aRi , eRi , iRo , dopo aver rappresentato in un grafo la relazione, determina quali condizioni occorre aggiungere per poter affermare, sotto queste ipotesi, che \mathcal{R} è una relazione di equivalenza.



Bisogna aggiungere eRa e quindi aRe , aRo e oRa

7. Dato l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e la relazione $\mathcal{R} = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (2,2), (2,3), (4,3), (3,3), (4,2), (4,4)\}$, stabilisci di quali proprietà gode.

Gode della proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Che tipo di relazione è? **Una relazione di ordine largo totale.**

8. Dall'esame del grafico della funzione rappresentato in figura, deduci:

Dominio: \mathbb{R}

Codominio: $\{y \in \mathbb{R} \mid y > -1\}$

$f(4) = 1$

$f(7) = 2$

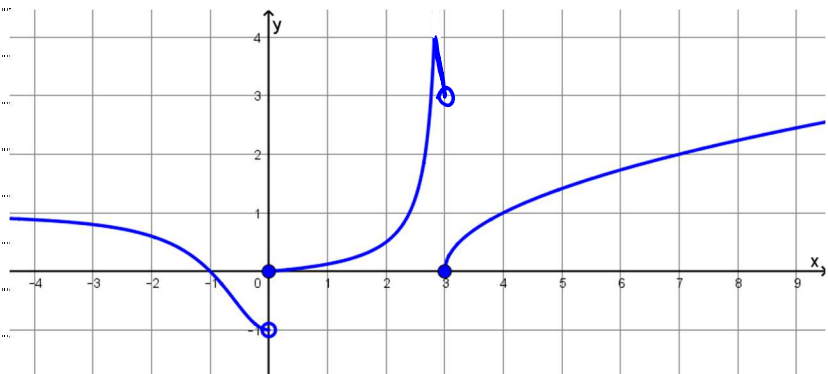
Immagine di 3: **0**

Controimmagine di -1: **non esiste**

Controimmagine di 0: **-1, 0, 3**

Iniettiva? **NO**

Suriettiva? **NO**



9. Per ciascuna delle seguenti funzioni f definite in A , determina il codominio C e stabilisci se $f: A \rightarrow C$ è una funzione invertibile. In caso affermativo, scrivi l'espressione analitica della corrispondente funzione inversa.

$$f: x \rightarrow \frac{x^2}{|x|+1} \quad A = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \quad C = \left\{\frac{4}{3}; \frac{1}{2}; 0\right\}$$

$$\text{È invertibile? NO} \quad f^{-1}(y) = // //$$

$$f: x \rightarrow 2x + 1 \quad A = \{-2, -1, 0, 2, 3\} \quad C = \{-3, -1, 1, 5, 7\}$$

$$\text{È invertibile? SI} \quad f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$$

10. Date le funzioni $f: x \rightarrow 2x - 1$, $g: x \rightarrow x^2 + 1$ e $h: x \rightarrow \frac{x+1}{x-1}$ con $x \in \mathbb{R}$, determina:

$$f(g(h(2))) = f(g(3)) = f(10) = 19$$

$$g(h(f(0))) = g(h(-1)) = g(0) = 1$$

$$f \circ g(x) = f(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1) - 1 = 2x^2 + 1$$

$$g \circ f(x) = g(2x - 1) = (2x - 1)^2 + 1 = 4x^2 - 4x + 1 + 1 = 4x^2 - 4x + 2$$

$$\text{Risolvi l'equazione: } 2(f \circ g(x)) - (g \circ f(x)) + 2x = 0$$

$$2(2x^2 + 1) - (4x^2 - 4x + 2) + 2x = 0$$

$$4x^2 + 2 - 4x^2 + 4x - 2 + 2x = 0$$

$$6x = 0$$

$$x = 0$$

11. Determina il dominio delle funzioni aventi le seguenti equazioni:

$$f(x) = \frac{5}{|x|+3} \quad D = \mathbb{R} \quad (\text{il denominatore è sempre diverso da 0, in quanto somma di due quantità positive})$$

$$f(x) = \frac{1-2x}{x} \quad D = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f(x) = \frac{4x-1}{16x^2-1} \quad 16x^2 - 1 \neq 0 \quad (4x-1)(4x+1) \neq 0 \quad D = \mathbb{R} - \left\{\pm \frac{1}{4}\right\}$$

$$f(x) = \frac{2x}{x^3+1} \quad x^3 + 1 \neq 0 \quad (x+1)(x^2-x+1) \neq 0 \quad D = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^3-4x^2+x-4} \quad x^2(x-4) + 1(x-4) \neq 0 \quad (x-4)(x^2+1) \neq 0 \quad D = \mathbb{R} - \{4\}$$

12. La funzione lineare $f(x) = mx + k$ è tale che $f(1) = 2$ e $f(-2) = -11$. Qual è la variazione del valore di $f(x)$ quando x aumenta di 2? (descrivi e motiva il procedimento)

$$m = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{2 + 11}{3} = \frac{13}{3}$$

$$\frac{13}{3} = \frac{f(x+2) - f(x)}{x+2-x} \quad f(x+2) - f(x) = \frac{26}{3}$$

Potremmo anche tradurre il problema con le proporzioni: quando c'è un aumento di 3, la funzione aumenta di 13, quindi quando c'è un aumento di 2:

$$3 : 13 = 2 : x \quad x = \frac{13 \cdot 2}{3} = \frac{26}{3}$$

13. La grandezza y è direttamente proporzionale al cubo della grandezza x e, per $x = 1$ si ha $y = 9$. Quindi, se $x = \frac{1}{3}$, y è uguale a:

Se la grandezza y è direttamente proporzionale al cubo della grandezza x , otteniamo: $\frac{y}{x^3} = \text{cost.}$

Possiamo determinare questa costante sostituendo i valori dati: $\frac{9}{1^3} = 9$, perciò otteniamo la relazione: $y = 9x^3$. Sostituendo $x = \frac{1}{3}$, otteniamo:

$$y = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 9 \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{3}$$

14. Data la funzione $f(x) = \frac{4}{x}$, determina $f \circ f$ (una composizione di f con se stessa) e $f \circ f \circ f$ (due composizioni). Considera poi la funzione $g(x)$ che ottieni componendo f con se stessa dodici volte. Quanto vale $g(12)$?

$f \circ f(x) = f\left(\frac{4}{x}\right) = \frac{4}{\frac{4}{x}} = x$ ovvero con una composizione, ottengo l'identità

$f \circ f \circ f(x) = f \circ f\left(\frac{4}{x}\right) = f(x) = \frac{4}{x}$ ovvero con due composizioni, è come se applicasse semplicemente la funzione.

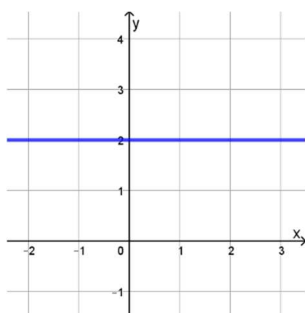
Quindi, applicando la funzione 12 volte, ovvero un numero pari di volte, ottengo:

$$g(x) = f(x) = \frac{4}{x} \qquad g(12) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

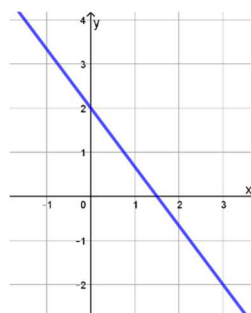
15. Considera le seguenti tabelle, stabilisci il tipo di proporzionalità che sussiste tra x e y e scrivi l'equazione della funzione di tale proporzionalità.

							Proporzionalità	Equazione
x	-8	-4	$-\frac{3}{2}$	-1	2	3	Proporzionalità inversa	$y = -\frac{24}{x}$
y	3	6	16	24	-12	-8		
x	-3	$-\frac{3}{2}$	-1	0	3	6	Proporzionalità quadratica diretta	$y = \frac{2}{3}x^2$
y	6	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	0	6	24		

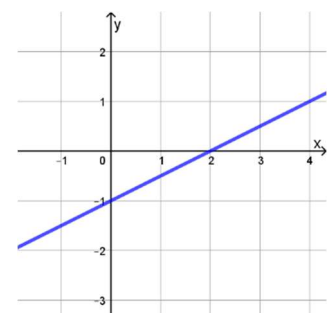
16. Scrivi l'equazione associata a ogni grafico:



$$y = 2$$



$$y = -\frac{4}{3}x + 2$$



$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

17. Dato $A = \frac{B^2}{3C}$

Se B raddoppia e C rimane costante A **quadruplica**

Se C dimezza e B rimane costante A **raddoppia**

Se B raddoppia e C raddoppia A **raddoppia**

Se C raddoppia e B rimane costante A **dimezza**