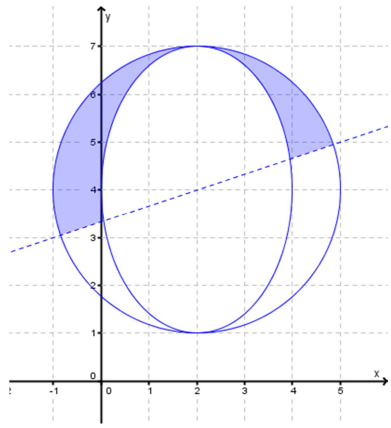
1. Rappresenta graficamente il seguente sistema: $\begin{cases} x^2+y^2-4x-8y+11\le 0 \\ 9x^2+4y^2-36x-32y+64\ge 0 \\ x-3y+10<0 \end{cases}$ e calcola l'area.

La prima è l'equazione di una circonferenza di centro $(2{,}4)$ e raggio 3 e ne considero solo la parte interna.
La seconda è l'equazione di un'ellisse:

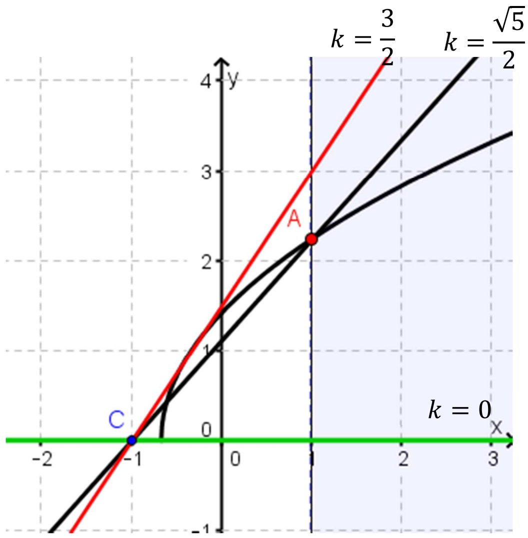
$$9\,(x^2-4x+4)+4\,(y^2-8y+16)=-64+36+64$$
$$9\,(x-2)^2+4\,(y-4)^2=36$$
$$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-4)^2}{9}=1$$

di centro di simmetria coincidente con il centro della circonferenza e semiassi 2 e 3. Dell'ellisse considero solo la parte esterna.
L'ultima disequazione è quella di una retta passante per il centro della circonferenza e ne considero solo il semipiano superiore.
Per calcolare l'area, faccio la semidifferenza tra l'area della circonferenza e quella dell'ellisse:



$$Area=\frac{9\pi-6\pi}{2}=\boldsymbol{\frac{3}{2}\pi}$$

2. Risolvi: $\begin{cases} \sqrt{2+3x}-kx-k=0 \\ -\frac{2}{3}\le x\le 1 \end{cases}$



$$\begin{cases} y=\sqrt{2+3x} \\ y-kx-k=0 \\ -\dfrac{2}{3}\le x\le 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{1}{3}y^2-\dfrac{2}{3} \\ y-k\,(x+1)=0 \\ -\dfrac{2}{3}\le x\le 1 \quad\wedge\quad y\ge 0 \end{cases}$$

Si tratta di una parabola – precisamente solo la parte superiore della parabola – con asse di simmetria parallelo all'asse x e di vertice $V\left(-\frac{2}{3},0\right)$ e di un fascio proprio di rette di centro $C(-1,0)$.

Il tratto di parabola è quello che parte dal vertice e arriva al punto A.

A ha ascissa 1 e, per determinarne l'ordinata, sostituisco l'ascissa nell'equazione della parabola, perciò: $A\,(1;\ \sqrt{5}\,)$. Il punto di ascissa $-\frac{2}{3}$ è invece il vertice.
Impongo il passaggio del fascio per i due punti dati:

$$A\,(1;\ \sqrt{5}\,):\sqrt{5}-k-k=0 \quad\Longrightarrow\quad k=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Imponendo il passaggio del fascio per V, ottengo una delle generatrici, ovvero $k=0$.
Determino il valore del parametro per la retta tangente:

$$y-k\left(\frac{1}{3}y^2-\frac{2}{3}\right)-k=0 \qquad ky^2-3y+k=0$$
$$\Delta=9-4k^2=0 \qquad k=\pm\frac{3}{2}$$

E il valore della tangente al ramo di parabola considerato è quello positivo.
Concludendo quindi:

$$\boldsymbol{1\ soluzione\ per\ 0\le k<\frac{\sqrt{5}}{2}} \qquad \boldsymbol{2\ soluzioni\ per\ \frac{\sqrt{5}}{2}\le k\le\frac{3}{2}}$$

3. Determina per quali valori del parametro reale k l'equazione: $kx^2+(2k+1)y^2+2x+2y-2=0$ rappresenta: a) una circonferenza; b) una parabola con asse parallelo agli assi coordinati; c) un'iperbole; d) un'ellisse.

A. Perché l'equazione rappresenti una circonferenza, i due coefficienti dei termini di secondo grado devono essere uguali:

$$k=2k+1 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{k=-1}$$

Per tale valore di k, ottengo la circonferenza: $x^2+y^2-2x-2y+2=0$, che è una circonferenza degenere nel suo centro.

B. Perché l'equazione rappresenti una parabola con asse parallelo all'asse y, il coefficiente del termine di secondo grado in y deve essere nullo; perché l'equazione rappresenti una parabola con asse parallelo all'asse x, il coefficiente del termine di secondo grado in x deve essere nullo, perciò:

$$\boldsymbol{k=0} \quad \vee \quad \boldsymbol{k=-\frac{1}{2}}$$

C. Perché l'equazione rappresenti un'iperbole, i due coefficienti dei termini di secondo grado devono essere discordi:

$$k\,(2k+1)<0 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{2}<k<0$$

D. Perché l'equazione rappresenti un'ellisse, i coefficienti dei termini di secondo grado e il coefficiente s devono essere concordi. Cominciamo con il determinare l'equazione canonica dell'ellisse, con il completamento del quadrato:

$$k\left(x^2+\frac{2}{k}x+\frac{1}{k^2}\right)+(2k+1)\left(y^2+\frac{2}{2k+1}y+\frac{1}{(2k+1)^2}\right)=2+\frac{1}{k}+\frac{1}{2k+1}$$

Ora abbiamo il coefficiente s che è il secondo membro dell'equazione:

$$\begin{cases} k>0 \\ 2k+1>0 \\ 2+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{2k+1}\geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} k<0 \\ 2k+1<0 \\ 2+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{2k+1}\leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k>0 \\ k>-\dfrac{1}{2} \\ 4k^2+2k+2k+1+k\geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} k<0 \\ k<-\dfrac{1}{2} \\ 4k^2+2k+2k+1+k\leq 0 \end{cases}$$

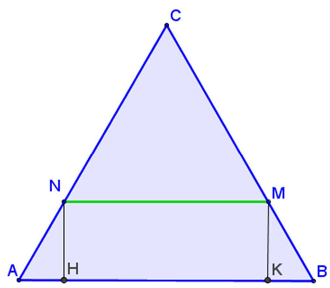
$$\begin{cases} k>0 \\ k>-\dfrac{1}{2} \\ 4k^2+5\,k+1\geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} k<0 \\ k<-\dfrac{1}{2} \\ 4k^2+5\,k+1\leq 0 \end{cases}$$

$$k_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{8}$$

$$\begin{cases} k>0 \\ k>-\dfrac{1}{2} \\ k\leq -1 \quad \vee \quad k\geq -\dfrac{1}{4} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} k<0 \\ k<-\dfrac{1}{2} \\ -1\leq k\leq -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{k>0} \quad \vee \quad \boldsymbol{-1\leq k<-\frac{1}{2}}$$

4. Nel triangolo equilatero ABC di lato unitario conduci una parallela al lato AB che incontri gli altri due lati nei due punti M e N in modo che nel trapezio ABMN la somma dei quadrati dei lati obliqui e della base minore misuri k ($k \in \mathbb{R}^+$).



Rappresento il triangolo equilatero ABC. Considero il punto M sul lato BC e traccio la parallela al lato AB che intercetta il lato AC in N. Considero come incognita il lato MN.

Valutiamo i due casi limite:

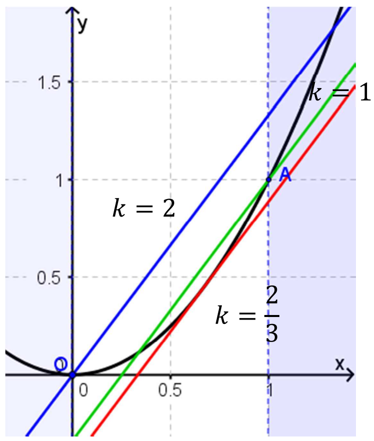
$$M \equiv B: x = 1: \ \overline{MB} = \overline{NA} = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = 0 \quad acc.$$

$$M \equiv N \equiv C: x = 0: \ \overline{MB} = \overline{NA} = 1 \quad \Longrightarrow \quad k = 2 \quad acc.$$

Perciò: $0 \leq x \leq 1$.

Determiniamo l'equazione generica, considerando che il triangolo CNM è simile al triangolo ABC, visto che MN è stata costruita come parallela al lato AB, perciò CMN è equilatero:

$$\overline{AN} = \overline{MB} = \overline{BC} - \overline{CM} = \overline{BC} - \overline{MN} = 1 - x$$



Perciò la relazione data diventa:

$$\overline{AN}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MN}^2 = k \qquad 2\,(1 - x)^2 + x^2 = k$$

Perciò il sistema è:

$$\begin{cases} 3x^2 - 4x + 2 - k = 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

E, applicando il metodo della parabola fissa:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ 3y - 4x + 2 - k = 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Impongo il passaggio del fascio per i due punti limite A e O:

$$O(0;0): \quad 2 - k = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = 2$$

$$A(1;1): \quad 3 - 4 + 2 - k = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = 1$$

Determino il valore del parametro per la retta tangente:

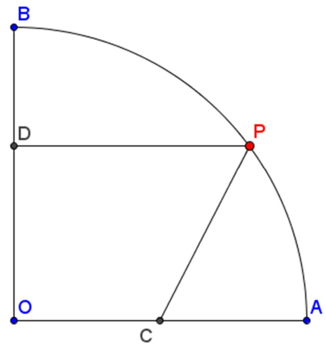
$$3x^2 - 4x + 2 - k = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Delta}{4} = 4 - 3\,(2 - k) = 0 \qquad 3k = -4 + 6 \qquad k = \frac{2}{3}$$

Concludendo quindi:

$$\boldsymbol{1\ soluzione\ per\ 1 < k \leq 2} \qquad \boldsymbol{2\ soluzioni\ per \frac{2}{3} \leq k \leq 1}$$

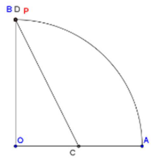
5. L'arco $\widehat{AB}$ è la quarta parte di una circonferenza di centro O e raggio di misura unitaria. Determina un punto P dell'arco in modo che, detti C il punto medio di OA e D la proiezione ortogonale di P su OB, si abbia

$$2\,\overline{PC}^2 + 3\overline{PD}^2 = k$$

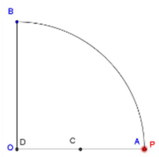


Sia $\overline{PD} = x$.

Procediamo prima con i casi limite:



$P \equiv B$ *cioè* $x = 0$: $\overline{PC}^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; $\overline{PD}^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{5}{2} \quad acc.$



$P \equiv A$ *cioè* $x = 1$: $\overline{PC}^2 = \frac{1}{4}$; $\overline{PD}^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{7}{2} \quad acc.$

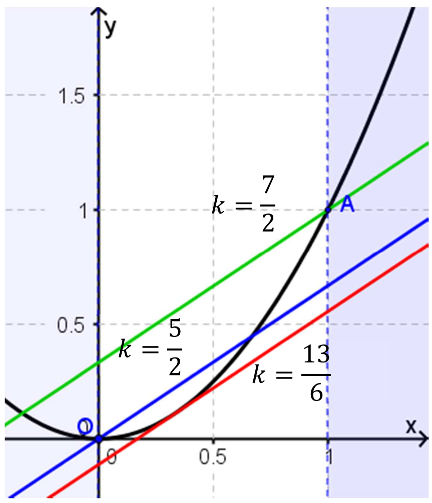
Perciò: $0 \le x \le 1$

Costruiamo la relazione, applicando il teorema di Pitagora:

$$\overline{OD}^2 = 1 - \overline{PD}^2 = 1 - x^2 \qquad \overline{PC}^2 = \overline{OD}^2 + (\overline{PD} - \overline{OC})^2 = 1 - x^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} - x$$

E quindi la relazione è:

$$\frac{5}{2} - 2x + 3x^2 = k \qquad (1)$$



Il sistema è, applicando il metodo della parabola fissa:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ 5 - 4x + 6y = 2k \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Impongo il passaggio del fascio per i due punti limite A e O:

$$A(1;1): \quad 5 - 4 + 6 = 2k \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{7}{2}$$

$$O(0;0): \quad 5 = 2k \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{5}{2}$$

Determino il valore del parametro per la retta tangente, usando la relazione (1) che corrisponde alla risolvente:

$$6x^2 - 4x + 5 - 2k = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 4 - 6\,(5 - 2k) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4 - 30 + 12\,k = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{13}{6}$$

Concludendo quindi:

$$\mathbf{1\ soluzione\ per}\ \frac{5}{2} < k \le \frac{7}{2} \qquad \mathbf{2\ soluzioni\ per}\ \frac{13}{6} \le k \le \frac{5}{2}$$