1. Un proiettile di 0,750 kg è lanciato verticalmente a una velocità di 18,0 m/s. Se il proiettile arriva solo a 11,8 m, calcola la forza media di attrito dell'aria.

$$m = 0{,}750\ kg \qquad v_o = 18{,}0\ m/s \qquad h_f = 11{,}8\ m \qquad v_f = 0\ m/s \qquad F_a?$$

Applico il principio di conservazione dell'energia, conteggiando anche il lavoro compiuto dalle forze non conservative e considerando il punto di partenza e il punto più alto raggiunto come il punto di arrivo:

$$U_o + K_o + L_{nc} = U_f + K_f$$

Nella situazione data, l'energia potenziale iniziale è nulla, visto che l'altezza iniziale è nulla. Allo stesso modo, essendo nulla la velocità finale, l'energia cinetica finale è nulla:

$$L_{nc} = U_f - K_o = mgh_f - \frac{1}{2}mv_o^2$$

Il lavoro compiuto dalla forza d'attrito è dato, per definizione, dal prodotto scalare tra forza d'attrito e spostamento, pari a h_f. I due vettori hanno la stessa direzione, ma verso opposto, perciò: $L_{nc} = F_a\ h_f \cos 180° = -F_a h_f$:

$$-F_a h_f = mgh_f - \frac{1}{2}mv_o^2 \quad \Rightarrow \quad F_a = \frac{\frac{1}{2}mv_o^2 - mgh_f}{h_f} = \mathbf{2{,}9\ N}$$

2. Quando un adulto di 81,0 kg sale su una scala a chiocciola che porta al secondo piano della sua casa, la sua energia potenziale gravitazionale aumenta di $2{,}00 \cdot 10^3\ J$. Di quanto aumenta l'energia potenziale gravitazionale di un bambino di massa 18,0 kg quando sale al secondo piano della stessa casa usando una scala normale?

$$M = 81{,}0\ kg \qquad \Delta U_M = 2{,}00 \cdot 10^3\ J \qquad m = 18{,}0\ kg \qquad \Delta U_m?$$

Per definizione di energia potenziale gravitazionale: $\Delta U_M = Mgh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\Delta U_M}{Mg}$.

Siccome il dislivello di altezza dell'adulto è uguale a quello del bambino (non conta il fatto che uno sia salito lungo la scala a chiocciola e l'altro lungo una scala normale), posso determinare la variazione di energia potenziale del bambino:

$$\Delta U_m = mgh = mg\,\frac{\Delta U_M}{Mg} = \frac{m}{M}\Delta U_M = \mathbf{444\ J}$$

3. Una molla verticale immagazzina un'energia potenziale elastica U quando viene appesa una massa m. Se si raddoppia la massa, per quale fattore viene moltiplicata l'energia potenziale elastica?

Appendendo una massa alla molla verticale, questa si sposta dalla posizione di equilibrio di una lunghezza x, perciò acquista una energia potenziale elastica pari a $U = \frac{1}{2}kx^2$. In questa nuova posizione di equilibrio, la somma delle forze è nulla, perciò la forza elastica è uguale in modulo, ma opposta, alla forza peso, quindi: $kx = mg \quad \Rightarrow \quad x = \frac{mg}{k}$

L'energia potenziale elastica è data da: $U = \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 = \frac{(mg)^2}{2k}$

Siccome l'energia potenziale è direttamente proporzionale al quadrato della massa, se si raddoppia la massa, l'energia potenziale elastica **quadruplica**.

4. Un vagone delle montagne russe, di massa 450 kg, parte da fermo da un punto A a 12,5 m di altezza e si muove verso un punto B a 3,8 m di altezza, per poi risalire fino a un punto C. È presente la forza di attrito, che compie un lavoro di 8400 J mentre il vagone scende, e un meccanismo di trazione a catena, che compie un lavoro di 13500 J per trainarlo in salita. Calcola a quale altezza si trova il punto C.

$$m = 450\ kg \qquad v_A = 0\ m/s \qquad h_A = 12{,}5\ m \qquad h_B = 3{,}8\ m \qquad L_{nc_{AB}} = -8400\ J \qquad L_{nc_{BC}} = 13500\ J \qquad h_C?$$

Applico il principio di conservazione dell'energia tra A e B e tra B e C:

$$\begin{cases} U_A + K_A + L_{nc_{AB}} = U_B + K_B \\ U_B + K_B + L_{nc_{BC}} = U_C + K_C \end{cases} \qquad \begin{cases} U_A + L_{nc_{AB}} = U_B + K_B \\ U_B + K_B + L_{nc_{BC}} = U_C \end{cases} \qquad U_A + L_{nc_{AB}} + L_{nc_{BC}} = U_C$$

$$mgh_C = mgh_A + L_{nc_{AB}} + L_{nc_{BC}} \quad \Rightarrow \quad h_C = \frac{mgh_A + L_{nc_{AB}} + L_{nc_{BC}}}{mg} = \mathbf{14\ m}$$

5. Una massa di 0,40 kg è attaccata a una molla di costante elastica 26 N/m e viene rilasciata da ferma a una distanza di 3,2 cm dalla posizione di equilibrio della molla.
   A. Determina il modulo della velocità della massa, quando si trova a metà strada dalla posizione di equilibrio.
   B. Qual è il modulo della velocità massima?
   C. A quale distanza dalla posizione di equilibrio si trova la massa nell'istante in cui il modulo della sua velocità è metà del modulo della velocità massima?

$$m = 0{,}40\ kg \qquad k = 26\ N/m \qquad x = 3{,}2\ cm \qquad v\left(\frac{x}{2}\right)? \qquad v_{max}? \qquad v_1 = \frac{1}{2}v_{max} \qquad x_1?$$

A. Per determinare il modulo della velocità a metà strada dalla posizione di equilibrio, applico il principio di conservazione dell'energia, considerando come posizioni diverse quella a $x/2$, dove ho la somma dell'energia potenziale elastica e dell'energia cinetica, e quella a x, dove l'energia potenziale elastica è massima e l'energia cinetica è nulla.

$$U_{\frac{x}{2}} + K_{\frac{x}{2}} = U_x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}k\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{kx^2}{4} + mv^2 = kx^2 \quad \Rightarrow \quad mv^2 = \frac{3}{4}kx^2$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{3k}{m}} = \mathbf{0,22\ m/s}$$

B. La velocità massima si ottiene nella posizione di equilibrio e, in questo caso, l'energia potenziale elastica si è trasformata tutta in energia cinetica:

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v_{max} = x\sqrt{\frac{k}{m}} = \mathbf{0,26\ m/s}$$

C. Nel caso di una velocità pari a metà di quella massima, applico il principio di conservazione dell'energia come nel punto A:

$$v_1 = \frac{1}{2}v_{max} = \frac{1}{2}x\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{4}x^2\frac{k}{m}\right) = \frac{1}{8}kx^2$$

$$U_1 + K_1 = U \quad \Rightarrow \quad U_1 = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{8}kx^2 = \frac{3}{8}kx^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{3}{8}kx^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}x = \mathbf{2,8\ cm}$$

6. Un oggetto che si muove lungo l'asse x ha un'energia potenziale il cui andamento è riportato in figura. L'oggetto ha massa 1,1 kg e parte da fermo nel punto A. Qual è il modulo della velocità nei punti B e D?

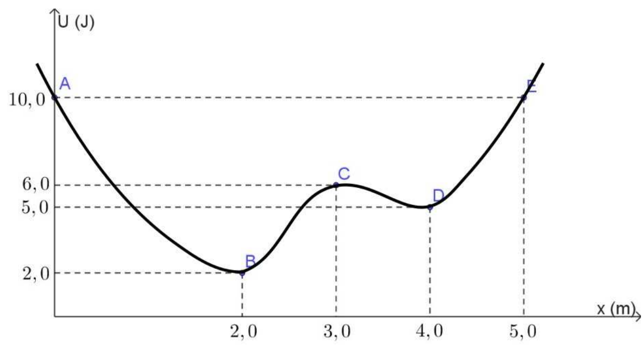
$$U_A = 10{,}0\ J \qquad m = 1{,}1\ kg \qquad v_A = 0\ m/s \qquad U_B = 2{,}0\ J \qquad U_D = 5{,}0\ J \qquad v_B? \qquad v_D?$$

Considero le posizioni in A e in B, applicando il principio di conservazione dell'energia:

$$U_A + K_A = U_B + K_B \quad \Rightarrow \quad K_B = U_A - U_B$$

Dalla definizione di energia cinetica: $K_B = \frac{1}{2}mv_B^2$

$$v_B = \sqrt{\frac{2(U_A - U_B)}{m}} = \mathbf{3,8\ m/s}$$



Considerando, invece, le posizioni A e D, e applicando il principio di conservazione dell'energia, analogamente ottengo la seconda velocità richiesta:

$$U_A + K_A = U_D + K_D \quad \Rightarrow \quad K_D = U_A - U_D \quad \Rightarrow \quad v_D = \sqrt{\frac{2(U_A - U_D)}{m}} = \mathbf{3,0\ m/s}$$