1. I punti $A\ (-2;5)$, $B\ (2;2)$, $C\ (4;8)$ sono vertici consecutivi del parallelogramma ABCD. Calcola le coordinate del quarto vertice D.

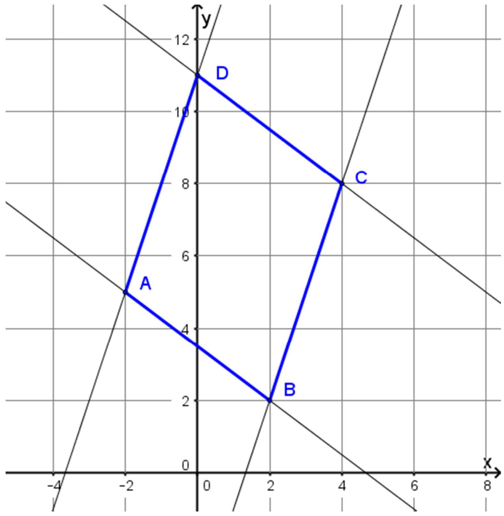
Determino il punto medio M della diagonale AC. Siccome nel parallelogramma le diagonali si tagliano vicendevolmente a metà, M sarà anche punto medio della diagonale DB. Conoscendone quindi il punto medio e un estremo, posso determinare il secondo estremo del segmento:

$$M=\left(\frac{x_A+x_C}{2};\frac{y_A+y_C}{2}\right)=\left(1;\frac{13}{2}\right)$$

$$x_M=\frac{x_B+x_D}{2} \quad\Rightarrow\quad x_D=2x_M-x_B=0$$

$$y=\frac{y_B+y_D}{2} \quad\Rightarrow\quad y_D=2y_M-y_B=11$$

$$\boldsymbol{B\ (0;11)}$$



2. Calcola le coordinate dei punti del segmento di estremi $A\left(-\frac{5}{3};-\frac{5}{3}\right)$ e $B\left(\frac{7}{3};\frac{4}{3}\right)$ che lo suddividono in tre parti congruenti.

Devo determinare le coordinate di C e D tali che:

$$\overline{AC}=\overline{CD}=\overline{DB} \quad\Rightarrow\quad \overline{AC}=\frac{1}{3}\overline{AB}$$

Considero le proiezioni C' e C" del punto C rispettivamente sull'asse x e sull'asse y. Per il teorema di Talete, considerate le parallele AA', CC' e BB' tagliate dall'asse x, abbiamo:

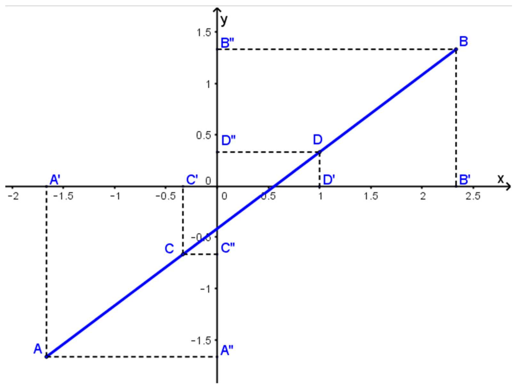
$$\overline{AC}:\overline{AB}=\overline{A'C'}:\overline{A'B'}$$

Perciò:

$$\overline{A'C'}=\frac{1}{3}\overline{A'B'} \quad\Rightarrow\quad x+\frac{5}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{3}+\frac{5}{3}\right) \quad\Rightarrow\quad x=-\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

Analogamente se consideriamo le parallele AA", CC" e BB" tagliate dall'asse y:

$$\overline{A"C"}=\frac{1}{3}\overline{A"B"} \quad\Rightarrow\quad y+\frac{5}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}+\frac{5}{3}\right) \quad\Rightarrow\quad y=-\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$



Posso determinare le coordinate di D, semplicemente usando la formula del punto medio, visto che D è il punto medio del segmento CB:

$$D\left(\frac{x_C+x_B}{2};\frac{y_C+y_B}{2}\right)=\left(\boldsymbol{1};\boldsymbol{\frac{1}{3}}\right)$$

3. Determina quali punti della bisettrice del primo e terzo quadrante hanno distanza dal punto $A\ (4;\ -1)$ uguale a $\sqrt{13}$.

Visto che il punto appartiene alla bisettrice di primo e terzo quadrante, avrà generiche coordinate: $P\ (x;x)$.
Pongo la distanza $\overline{AP}$ uguale alla misura data:

$$\sqrt{(x-4)^2+(x+1)^2}=\sqrt{13} \quad \Rightarrow \quad x^2-8x+16+x^2+2x+1=13$$

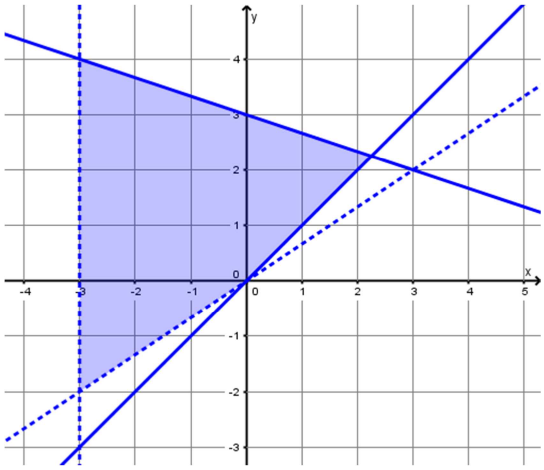
$$x^2-3x+2=0 \qquad x_{1,2}=\frac{3\pm 1}{2}=\left\langle \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right.$$

I due punti richiesti hanno coordinate:

$$\boldsymbol{P_1\ (2;2)} \qquad \boldsymbol{P_2\ (1;1)}$$

4. Scrivi un sistema di disequazioni le cui soluzioni sono l'insieme di punti indicato nella figura.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+3y-9\le 0} \\ \boldsymbol{x+3>0} \\ \boldsymbol{2x-3y<0} \\ \boldsymbol{x-y\le 0} \end{cases}$$

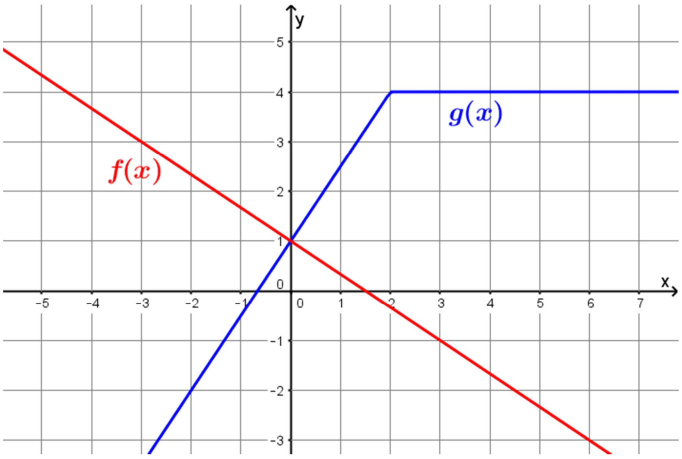


5. Rappresenta le due funzioni e stabilisci per quali valori di x si ha $f(x)>g(x)$.

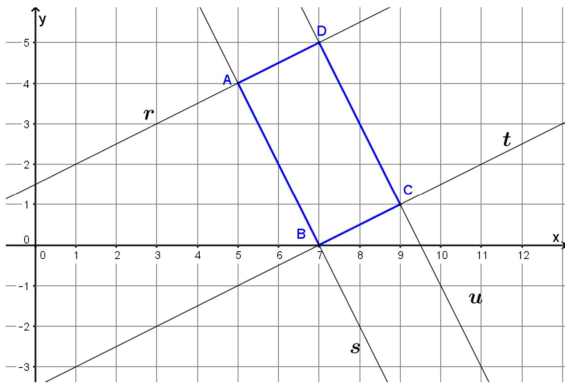
$$f(x):\ y=-\frac{2}{3}x+1$$

$$g(x):\ y=\begin{cases} \frac{3}{2}x+1 & se\ x\le 2 \\ 4 & se\ x>2 \end{cases}$$

$f(x)>g(x)$: $\boldsymbol{x<0}$



6. Un rettangolo ABCD ha un vertice nel punto $A\ (5;4)$ e un lato sulla retta di equazione $x-2y+3=0$. Individua le coordinate degli altri tre vertici sapendo che uno di essi sta sull'asse x, mentre gli altri sono interni al primo quadrante e che il perimetro del rettangolo è $6\sqrt{5}$. Determina inoltre l'area della circonferenza circoscritta al rettangolo.



Considerato che il punto A appartiene alla retta r data, determino la retta s perpendicolare a r e passante per A e dalla sua intersezione con l'asse x, determino le coordinate di B:

$$m_r=\frac{1}{2}\qquad m_s=-2$$

$$y-4=-2\,(x-5)\qquad y=-2x+14$$

$$\begin{cases} y=-2x+14 \\ y=0 \end{cases}\qquad \boldsymbol{B\ (7;0)}$$

Determino la lunghezza del segmento AB:

$$\overline{AB}=\sqrt{(5-7)^2+(4-0)^2}=2\sqrt{5}$$

Posso quindi determinare la misura del lato BC a partire dal perimetro del rettangolo:

$$\overline{BC}=\frac{2p-2\cdot\overline{AB}}{2}=p-\overline{AB}=3\sqrt{5}-2\sqrt{5}=\sqrt{5}$$

Determino la retta t, parallela alla retta r e passante per B. Su di essa, determino il punto C che abbia distanza da B uguale a $\sqrt{5}$:

$$m_r=\frac{1}{2}\qquad m_t=\frac{1}{2}$$

$$y-0=\frac{1}{2}\,(x-7)\qquad y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2} \\ \sqrt{(x-7)^2+y^2}=\sqrt{5} \end{cases}\qquad \begin{cases} y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2} \\ x^2-14x+49+\frac{1}{4}x^2+\frac{49}{4}-\frac{7}{2}x=5 \end{cases}$$

$$\frac{5}{4}x^2-\frac{35}{2}x+\frac{225}{4}=0\qquad x^2-14x+45=0\qquad x_{1,2}=\frac{7\pm 2}{1}$$

Devo escludere la soluzione $x=5$ perché otterrei un'ordinata negativa, perciò:

$$\boldsymbol{C\ (9;1)}$$

A questo punto, determino la retta u passante per C e parallela a s e la interseco con la retta r per determinare le coordinate di D:

$$m_s=-2\qquad m_u=-2$$

$$y-1=-2\,(x-9)\qquad y=-2x+19$$

$$\begin{cases} y=-2x+19 \\ x-2y+3=0 \end{cases}\qquad \begin{cases} y=-2x+19 \\ x+4x-38+3=0 \end{cases}\qquad \boldsymbol{D\ (7;5)}$$

La circonferenza circoscritta al rettangolo ha diametro coincidente con la diagonale BD, perciò determino la misura della diagonale e, dalla sua metà, determino l'area:

$$r=\frac{\overline{BD}}{2}=\frac{|5-0|}{2}=\frac{5}{2}\qquad A=\pi r^2=\boldsymbol{\frac{25}{4}\pi}$$