1. Un carrello di massa m, che si muove con una velocità v su una rotaia a cuscino d'aria priva di attrito, urta contro un identico carrello che è in quiete. Se i due carrelli rimangono attaccati dopo la collisione, qual è l'energia cinetica finale del sistema, in funzione di m e v?

$$m_1 = m_2 = m \qquad v_1 = v \qquad v_2 = 0 \qquad K_f?$$

Senza l'intervento di forze esterne, la quantità di moto totale del sistema si conserva, perciò:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)V \qquad \Rightarrow \qquad mv = 2m\,V \qquad \Rightarrow \qquad V = \frac{v}{2}$$

Avendo ricavato la velocità finale dei due carrelli dopo la collisione, posso determinare l'energia cinetica finale:

$$K_f = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{1}{4} m v^2}$$

2. Un carrello A di massa 300 g si muove in linea retta alla velocità di 4,50 m/s e urta un carrello B di 450 g che si trova davanti a esso e si muove nello stesso verso. Dopo l'urto elastico, A si muove alla velocità di 1,62 m/s. Qual è la velocità di B, prima e dopo l'urto?

$$m_1 = 300\ g = m \qquad m_2 = 450\ g = \frac{3}{2}m \qquad v_1 = 4{,}50\ m/s \qquad V_1 = 1{,}62\ m/s \qquad v_2? \qquad V_2?$$

Trattandosi di un urto elastico, si conservano sia la quantità di moto che l'energia cinetica. Posso quindi determinare le due velocità:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 + \frac{3}{2} v_2 = V_1 + \frac{3}{2} V_2 \\ v_1^2 + \frac{3}{2} v_2^2 = V_1^2 + \frac{3}{2} V_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 - V_1 = \frac{3}{2}(V_2 - v_2) \\ v_1^2 - V_1^2 = \frac{3}{2}(V_2^2 - v_2^2) \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 - V_1 = \frac{3}{2}(V_2 - v_2) \\ (v_1 - V_1)(v_1 + V_1) = \frac{3}{2}(V_2 - v_2)(V_2 + v_2) \end{cases}$$

Mantenendo la prima equazione e sostituendo alla seconda il risultato del rapporto membro a membro tra la seconda e la prima equazione, otteniamo:

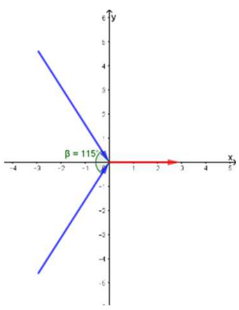
$$\begin{cases} v_1 - V_1 = \frac{3}{2} V_2 - \frac{3}{2} v_2 \\ v_1 + V_1 = V_2 + v_2 \end{cases}$$

Moltiplicando la seconda equazione per $\frac{3}{2}$ e sommandola alla prima, otteniamo il valore della velocità finale e sottraendola dalla prima otteniamo invece il valore della velocità iniziale:

$$\begin{cases} \frac{5}{2} v_1 + \frac{1}{2} V_1 = 3V_2 \\ -\frac{1}{2} v_1 - \frac{5}{2} V_1 = -3v_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_2 = \frac{5v_1 + V_1}{6} = \mathbf{4{,}02\ m/s} \\ v_2 = \frac{v_1 + 5V_1}{6} = \mathbf{2{,}1\ m/s} \end{cases}$$

3. Due giocatori di hockey di 72,0 kg che si muovono a 5,45 m/s si urtano e rimangono attaccati. Se l'angolo tra le loro direzioni iniziali era di 115°, qual è il modulo della loro velocità dopo la collisione?

$$m_1 = m_2 = m \qquad v_1 = v_2 = v = 5{,}45\ m/s \qquad \alpha = 115° \qquad V?$$



Scegliamo il sistema di riferimento indicato a lato. Nel grafico, la velocità risultante ha solo la componente orizzontale, perché le componenti verticali delle due quantità di moto iniziali sono uguali e opposte. Perciò, per determinare la quantità di moto finale (e quindi la velocità finale) basta considerare solo la componente orizzontale:

$$mv\cos 57{,}5° + mv\cos 57{,}5° = 2m\,V$$

$$2v\cos 57{,}5° = 2\,V$$

$$V = v\cos 57{,}5° = \mathbf{2{,}93\ m/s}$$

Soluzione alternativa:
Trattandosi di un urto totalmente anelastico, si conserva solo la quantità di moto. Considero un piano cartesiano con l'asse delle ascisse coincidente con la direzione di uno dei due giocatori:

$$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = (m_1 + m_2)\,\vec{V} \qquad \begin{cases} mv + mv\cos 115° = 2m\,V_x \\ mv\sin 115° = 2m\,V_y \end{cases} \qquad \begin{cases} V_x = \dfrac{v}{2}\,(1+\cos 115°) \\ V_y = \dfrac{v}{2}\sin 115° \end{cases}$$

Facendo la radice quadrata della somma dei quadrati delle due componenti, ottengo il modulo della velocità dopo la collisione:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \frac{v}{2}\sqrt{(1+\cos 115°) + \sin^2 115°} = \mathbf{2{,}93\ m/s}$$

4. Tre carrelli su una rotaia a cuscino d'aria hanno masse rispettivamente di $4m$, $2m$ e m. Il carrello con la massa maggiore ha una velocità iniziale v, mentre gli altri due carrelli sono inizialmente a riposo. Supponendo si tratti di urti elastici, determina la velocità finale di ciascun carrello in funzione della velocità iniziale v.

$$m_1 = 4m \qquad m_2 = 2m \qquad m_3 = m \qquad v_1 = v \qquad v_2 = v_3 = 0 \qquad V_1? \qquad V_2? \qquad V_3?$$

Considero innanzi tutto l'urto tra il primo e il secondo carrello. Trattandosi di un urto elastico, si conserveranno sia la quantità di moto che l'energia cinetica:

$$\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1V_1 + m_2{V_2}' \\ \dfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2v_2^2 = \dfrac{1}{2}m_1V_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2(V_2')^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2v = 2V_1 + {V_2}' \\ 2v^2 = 2V_1^2 + (V_2')^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\,(v - V_1) = {V_2}' \\ 2\,(v - V_1)(v + V_1) = (V_2')^2 \end{cases}$$

Mantenendo la prima equazione e sostituendo alla seconda il risultato del rapporto membro a membro tra la seconda e la prima equazione, otteniamo:

$$\begin{cases} 2v - 2V_1 = {V_2}' \\ v + V_1 = {V_2}' \end{cases}$$

Moltiplicando la seconda equazione per 2 e sommando membro a membro, otteniamo il valore della velocità finale del secondo carrello, mentre sottraendo la prima equazione dalla seconda (senza moltiplicare per 2), otteniamo il valore della velocità finale del primo carrello:

$$\begin{cases} 4v = 3{V_2}' \\ v - 3V_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{V_1 = \dfrac{1}{3}v} \\ {V_2}' = \dfrac{4}{3}v \end{cases}$$

La velocità finale del secondo carrello diventa la velocità iniziale nel secondo urto, quello tra secondo e terzo carrello. Anche in questo caso, trattandosi di un urto elastico, si conservano sia la quantità di moto che l'energia cinetica:

$$\begin{cases} m_2{V_2}' + m_3v_3 = m_2V_2 + m_3V_3 \\ \dfrac{1}{2}m_2(V_2')^2 + \dfrac{1}{2}m_3v_3^2 = \dfrac{1}{2}m_2V_2^2 + \dfrac{1}{2}m_3V_3^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\cdot\dfrac{4}{3}v = 2V_2 + V_3 \\ 2\cdot\dfrac{16}{9}v^2 = 2V_2^2 + V_3^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\left(\dfrac{4}{3}v - V_2\right) = V_3 \\ 2\left(\dfrac{4}{3}v - V_2\right)\left(\dfrac{4}{3}v + V_2\right) = V_3^2 \end{cases}$$

Mantenendo la prima equazione e sostituendo alla seconda il risultato del rapporto membro a membro tra la seconda e la prima equazione, otteniamo:

$$\begin{cases} \dfrac{8}{3}v - 2V_2 = V_3 \\ \dfrac{4}{3}v + V_2 = V_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{8}{3}v - 2V_2 = \dfrac{4}{3}v + V_2 \\ V_3 = \dfrac{4}{3}v + V_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{V_2 = \dfrac{4}{9}v} \\ \boldsymbol{V_3 = \dfrac{16}{9}v} \end{cases}$$

5. Un protone urta elasticamente un altro protone fermo alla velocità di $0{,}98\ c$ (dove c è la velocità della luce), deviando la traiettoria di 32° rispetto alla velocità iniziale. Determina le velocità finali dei due protoni.

$$m_1 = m_2 = m \qquad v_1 = 0{,}98\ c \qquad v_2 = 0 \qquad \alpha = 32° \qquad V_1? \qquad V_2?$$

Dalla conservazione della quantità di moto, ricaviamo:

$$m_1\vec{v_1} = m_1\vec{V_1} + m_2\vec{V_2}$$

Ovvero, visto che le masse sono uguali:

$$\vec{v_1} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$$

In altre parole, la velocità iniziale è l'ipotenusa del triangolo rettangolo che ha per cateti le due velocità finali, visto che, quando i due oggetti che si urtano hanno la stessa massa e uno dei due è fermo, le due velocità finali formano un angolo di 90°.
Possiamo quindi ricavare facilmente le due velocità finali, considerandole come componenti ortogonali della velocità iniziale:

$$V_1 = v_1 \sin 58° = \mathbf{0{,}83}\ \boldsymbol{c} \qquad\qquad V_2 = v_1 \cos 58° = \mathbf{0{,}52}\ \boldsymbol{c}$$

<u>Soluzione alternativa</u>:
Trattandosi di un urto elastico e sapendo che le masse dei due protoni sono uguali, le due velocità finali formeranno un angolo di 90°, perciò la velocità finale del secondo protone forma un angolo $\beta = 58°$ con la traiettoria della velocità iniziale.
Considerando un piano cartesiano con l'asse x coincidente con la traiettoria della velocità iniziale del primo protone, scompongo la conservazione della quantità di moto nelle due direzioni cartesiane:

$$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = m_1\vec{V_1} + m_2\vec{V_2} \qquad \begin{cases} mv_1 = mV_1\cos 32° + mV_2 \cos 58° \\ 0 = mV_1 \sin 32° - mV_2 \sin 58° \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = V_1 \cos 32° + V_2 \cos 58° \\ V_2 = V_1 \dfrac{\sin 32°}{\sin 58°} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = V_1 \cos 32° + V_1 \sin 32° \cdot \dfrac{\cos 58°}{\sin 58°} \\ V_2 = V_1 \dfrac{\sin 32°}{\sin 58°} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{v_1}{\cos 32° + \sin 32° \cdot \dfrac{\cos 58°}{\sin 58°}} = \mathbf{0{,}83}\ \boldsymbol{c} \\ V_2 = V_1 \dfrac{\sin 32°}{\sin 58°} = \mathbf{0{,}52}\ \boldsymbol{c} \end{cases}$$

6. Alle due estremità di un'asta omogenea lunga 0,36 m, sono attaccate due piccole sfere di massa 0,56 kg e 0,42 kg. La posizione del centro di massa del sistema è spostata di 2,0 cm dal centro dell'asta verso la sfera più pesante. Determina la massa dell'asta.

$$m_1 = 0{,}56\ kg \qquad m_2 = 0{,}42\ kg \qquad m_3 = m \qquad l = 0{,}36\ m \qquad m?$$

Considero l'asse x con la stessa direzione dell'asta omogenea e con l'origine nella prima sfera. Da questo ottengo i seguenti dati:

$$x_1 = 0\ m \qquad x_2 = 0{,}36\ m \qquad x_3 = 0{,}18\ m \qquad x_{CM} = 0{,}16\ m$$

Risolvo la seguente equazione:

$$\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = x_{CM} \qquad \Rightarrow \qquad m_2x_2 + mx_3 = m_1x_{CM} + m_2x_{CM} + mx_{CM}$$

$$m\ (x_3 - x_{CM}) = (m_1 + m_2)\ x_{CM} - m_2x_2$$

$$m = \frac{(m_1 + m_2)\ x_{CM} - m_2x_2}{x_3 - x_{CM}} = \mathbf{0{,}28}\ \boldsymbol{kg}$$