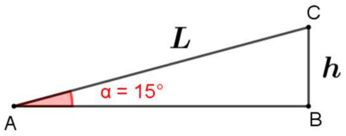
1. Una cassa di $17\ kg$ viene scaricata dal pianale di un camion facendola scivolare per una tavola lunga $6{,}0\ m$ e inclinata di $15°$. Calcola il lavoro compiuto dalla forza di gravità sulla cassa.



$$m = 17\ kg \qquad L = 6{,}0\ m \qquad \alpha = 15° \qquad L?$$

Il lavoro compiuto dalla forza di gravità sulla cassa è dato dall'opposto della differenza di energia potenziale tra il punto di arrivo e il punto di partenza, cioè:

$$L = -\Delta U = -(U_A - U_C) = U_C - U_A$$

Scegliendo come livello zero per l'energia potenziale quello corrispondente ad A, abbiamo: $L = U_C = mgh$. Per le relazioni dei triangoli rettangoli, $h = L \sin\alpha$, perciò:

$$L = mgL\sin\alpha = \mathbf{2{,}6 \cdot 10^2\ J}$$

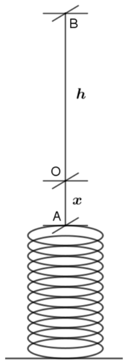
2. Stai usando un vogatore. Ogni volta che tiri verso di te la barra che simula il remo, percorri una distanza di $1{,}2\ m$ in un tempo di $1{,}8\ s$. Il display del vogatore indica che stai sviluppando una potenza di $85\ W$. Calcola l'intensità media della forza che eserciti sull'impugnatura.

$$s = 1{,}2\ m \qquad \Delta t = 1{,}8\ s \qquad P = 85\ W \qquad F?$$

Per la definizione di potenza: $P = \frac{L}{\Delta t}$ e, per la definizione di lavoro: $L = Fs$, dato che forza e spostamento hanno la stessa direzione e lo stesso verso. Perciò:

$$P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{Fs}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{P \cdot \Delta t}{s} = \mathbf{1{,}3 \cdot 10^2\ N}$$

3. Un fucile a molla spara verso l'alto un proiettile di $2{,}1 \cdot 10^{-2}\ kg$. La molla ha massa trascurabile e viene compressa di $9{,}1 \cdot 10^{-2}\ m$. Il proiettile raggiunge l'altezza di $6{,}10\ m$ dal livello che ha la molla in condizioni di riposo. Trascura la resistenza dell'aria. Calcola la costante elastica della molla.



$$m = 2{,}1 \cdot 10^{-2}\ kg \qquad x = 9{,}1 \cdot 10^{-2}\ m \qquad h = 6{,}10\ m \qquad k?$$

Applico il principio di conservazione dell'energia, considerando A e B come estremi: $E_A = E_B$

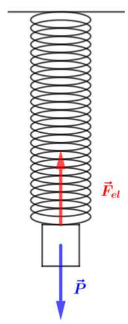
In A ho l'energia potenziale della molla, che risulta essere compressa di un tratto x, rispetto alla posizione di equilibrio O: $E_A = U_{el_A} = \frac{1}{2}kx^2$

In B, ho l'energia potenziale gravitazionale del proiettile e, considerando A come altezza nulla, ottengo: $E_B = U_B = mg(h + x)$

A questo punto, è facile determinare quanto richiesto:

$$\frac{1}{2}kx^2 = mg\,(h + x) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2mg\,(h + x)}{x^2} = \mathbf{3{,}1 \cdot 10^2\ N/m}$$

4. Un blocco di $3{,}2\ kg$ è appeso mediante una molla al soffitto. L'energia potenziale elastica del sistema blocco-molla è $1{,}8\ J$. Calcola l'energia potenziale elastica del sistema quando il blocco è sostituito con un blocco di $5{,}0\ kg$.



$$m_1 = 3{,}2\ kg \qquad U_1 = 1{,}8\ J \qquad m_2 = 5{,}0\ kg \qquad U_2?$$

Nel momento in cui si raggiunge l'equilibrio, la somma delle forze agenti sul blocco è nulla, cioè il peso del blocco è uguale alla forza elastica esercitata dalla molla:

$$P_1 = F_{el_1} \quad \Rightarrow \quad m_1 g = kx_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{m_1 g}{k}$$

L'energia potenziale elastica, in questo caso, è data da:

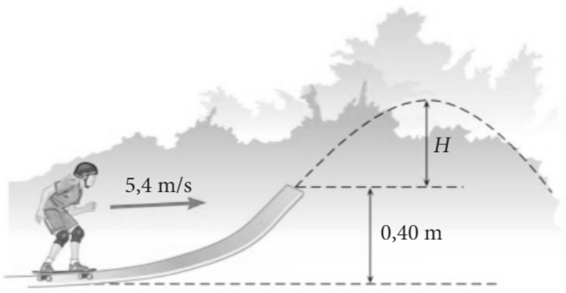
$$U_1 = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}k\frac{m_1^2 g^2}{k^2} = \frac{m_1^2 g^2}{2k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{m_1^2 g^2}{2U_1}$$

Posso, quindi, determinare l'energia potenziale del secondo caso, dopo aver ricavato la costante elastica della molla in funzione dell'energia potenziale del primo punto:

$$U_2 = \frac{m_2^2 g^2}{2k} = \frac{m_2^2 g^2}{2\frac{m_1^2 g^2}{2U_1}} = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 U_1 = \mathbf{4{,}4\ J}$$

5. La ragazza rappresentata in figura si muove sul suo skateboard con una velocità di $5{,}4\ m/s$ lungo la parte orizzontale di una pista, che poi sale con una pendenza di $48°$ fino al suo punto più alto, che si trova a un'altezza di $0{,}40\ m$ dal suolo. Quando la ragazza esce dalla pista la sua traiettoria è quella di un proiettile lanciato con una certa velocità iniziale. Trascura l'attrito e la resistenza dell'aria. Determina a quale altezza massima H rispetto al punto più alto della pista arriva la ragazza.

$$v_A = 5{,}4\ m/s \qquad \alpha = 48° \qquad h_A = 0\ m \qquad h_B = 0{,}40\ m \qquad H?$$



Considero tre punti principali, nel percorso della ragazza: il punto A, alla partenza (con altezza nulla e velocità data), il punto B, ovvero il punto di distacco dalla pista, e il punto C, quello ad altezza maggiore. Applico la legge di conservazione dell'energia meccanica:

$$E_A = E_B \quad \Rightarrow \quad U_A + K_A = U_B + K_B$$

$$mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}v_A^2 = gh_B + \frac{1}{2}v_B^2$$

Perciò la velocità, al momento del distacco dalla pista, è data da:

$$v_B = \sqrt{v_A^2 - 2gh_B}$$

A questo punto, ricordo che la pista è inclinata di 48°, e che quello che mi è stato fornito applicando la legge di conservazione dell'energia meccanica è il modulo della velocità di distacco. Rifletto sul moto parabolico: nel punto più alto della traiettoria, il punto C, la ragazza avrà una velocità nulla nella sua componente verticale, ma nella componente orizzontale sarà uguale a quella di partenza, dato che il moto parabolico nasce dalla composizione di due moti: un moto rettilineo uniforme nella componente orizzontale e un moto rettilineo uniformemente accelerato nella componente verticale. Per procedere, ricordo prima le componenti della velocità in B:

$$v_{B_x} = v_B \cos\alpha \qquad\qquad v_{B_y} = v_B \sin\alpha$$

Applico la legge di conservazione dell'energia meccanica tra i punti B e C, considerando come livello 0 quello in B:

$$E_B = E_C \quad \Rightarrow \quad U_B + K_B = U_C + K_C \quad \Rightarrow \quad 0 + \frac{1}{2}mv_B^2 = mgH + \frac{1}{2}mv_C^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(v_{B_x}^2 + v_{B_y}^2\right) = gH + \frac{1}{2}v_{B_x}^2$$

Ora posso velocemente determinare l'altezza richiesta:

$$\frac{1}{2}v_{B_x}^2 + \frac{1}{2}v_{B_y}^2 = gH + \frac{1}{2}v_{B_x}^2 \quad \Rightarrow \quad gH = \frac{1}{2}v_{B_y}^2 \quad \Rightarrow \quad H = \frac{(v_B \sin\alpha)^2}{2g} = (v_A^2 - 2gh_B)\cdot\frac{\sin^2\alpha}{2g} = \mathbf{0,60\ m}$$

6. A

Uno sciatore di $63\ kg$ risale su un pendio innevato inclinato di $25°$. La velocità iniziale dello sciatore è $6{,}6\ m/s$. Dopo aver percorso $1{,}9\ m$, la sua velocità è $4{,}4\ m/s$. Calcola il lavoro fatto dalla forza di attrito sullo sciatore e l'intensità della forza di attrito.

$$m = 63\ kg \qquad \alpha = 25° \qquad v_A = 6{,}6\ m/s \qquad s = 1{,}9\ m \qquad v_B = 4{,}4\ m/s \qquad L_{nc}? \qquad F_a?$$

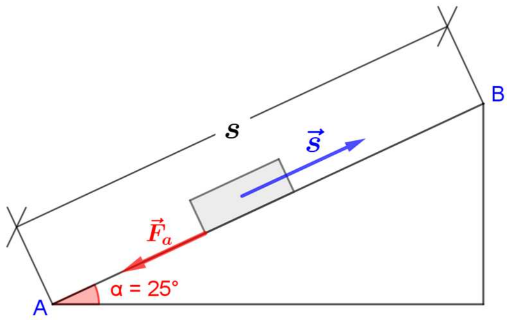
Applico la legge di conservazione dell'energia meccanica tra i punti A e B, considerando il punto A ad altezza 0 m:

$$E_A = E_B \quad \Rightarrow \quad U_A + K_A + L_{nc} = U_B + K_B$$

$$L_{nc} = U_B + K_B - K_A = mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

L'altezza del punto B si può ricavare dalle relazioni dei triangoli rettangoli:

$$h_B = s\sin\alpha$$



Perciò ottengo:

$$L_{nc} = mgs\sin\alpha + \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \mathbf{-2,7\cdot 10^2\ J}$$

Ricordando che

$$L_{nc} = \vec{F}_a\cdot\vec{s} = F_a s\cos(180°) = -F_a s \quad \Rightarrow \quad F_a = -\frac{L_{nc}}{s} = \mathbf{1,4\cdot 10^2\ N}$$

6. B

Due saltatori con l'asta superano l'asticella alla stessa altezza. Il primo passa sopra l'asticella a $1{,}00\ m/s$ e atterra con velocità $8{,}90\ m/s$. Il secondo atterra con velocità $9{,}00\ m/s$. Trascurando ogni tipo di attrito, con quale velocità il secondo saltatore è passato sopra l'asticella?

$$h_A = h_B \qquad v_{A_1} = 1{,}00\ m/s \qquad v_{A_2} = 8{,}90\ m/s \qquad v_{B_2} = 9{,}00\ m/s \qquad v_{B_1}?$$

Applico la legge di conservazione dell'energia meccanica per entrambi i saltatori, considerando come livello zero per l'energia potenziale il punto di atterraggio:

$$\begin{cases} U_{A_1} + K_{A_1} = U_{A_2} + K_{A_2} \\ U_{B_1} + K_{B_1} = U_{B_2} + K_{B_2} \end{cases} \qquad \begin{cases} U_{A_1} + K_{A_1} = K_{A_2} \\ U_{B_1} + K_{B_1} = K_{B_2} \end{cases} \qquad \begin{cases} m_A g h_A + \frac{1}{2} m_A v_{A_1}^2 = \frac{1}{2} m_A v_{A_2}^2 \\ m_B g h_B + \frac{1}{2} m_B v_{B_1}^2 = \frac{1}{2} m_B v_{B_2}^2 \end{cases}$$

Ricordando che i due saltatori superano la stessa altezza, posso ricavare l'altezza nella prima equazione, in funzione delle due velocità del primo saltatore, e sostituirla nella seconda equazione, in modo da determinare la velocità richiesta:

$$\begin{cases} h_A = \frac{1}{2g}\left(v_{A_2}^2 - v_{A_1}^2\right) \\ \frac{1}{2}\left(v_{A_2}^2 - v_{A_1}^2\right) + \frac{1}{2} v_{B_1}^2 = \frac{1}{2} v_{B_2}^2 \end{cases} \qquad v_{B_1}^2 = v_{B_2}^2 - v_{A_2}^2 + v_{A_1}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{B_1} = \sqrt{v_{B_2}^2 - v_{A_2}^2 + v_{A_1}^2} = \mathbf{1{,}7\ m/s}$$