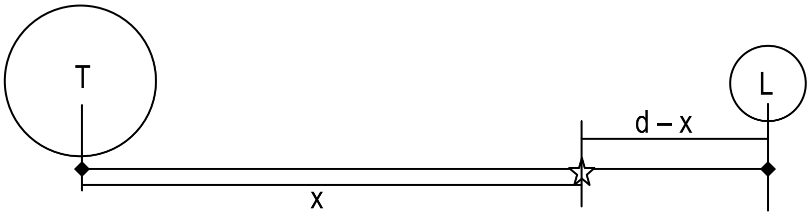
1. Una navicella spaziale di massa *m* viaggia dalla Terra alla Luna lungo una traiettoria rettilinea che unisce il centro della Terra e il centro della Luna. A quale distanza dal centro della Terra la forza totale esercitata sulla navicella è nulla?



La forza che agisce sull'oggetto di massa m (indicato nella figura con una stellina) da parte della Terra deve essere uguale alla forza che agisce sullo stesso oggetto da parte della Luna, ovvero:

$$G\frac{mM_T}{x^2} = G\frac{mM_L}{(d-x)^2}$$

dove ho indicato con d la distanza media tra la Terra e la Luna. Dall'equazione precedente, posso determinare il valore di x:

$$\frac{M_T}{x^2} = \frac{M_L}{(d-x)^2} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{d-x}{x}\right)^2 = \frac{M_L}{M_T} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d-x}{x} = \sqrt{\frac{M_L}{M_T}}$$

Ho scelto il valore positivo in quanto d > x e, quindi, a primo membro ho una quantità sicuramente positiva:

$$\frac{d}{x} - 1 = \sqrt{\frac{M_L}{M_T}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{x} = 1 + \sqrt{\frac{M_L}{M_T}} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{d}{1+\sqrt{\frac{M_L}{M_T}}} = \mathbf{3,46 \cdot 10^8\, m}$$

2. Un pianeta ha una massa 16 volte superiore alla massa della Terra e un raggio che è 12 volte maggiore del raggio della Terra. Qual è il rapporto tra l'accelerazione di gravità della Terra e quella del pianeta?

L'accelerazione di gravità si calcola eguagliando la forza peso di un oggetto di massa *m* alla forza di attrazione gravitazionale di Newton dello stesso oggetto da parte della Terra:

$$mg = G\frac{mM_T}{r_T^2} \quad \Longrightarrow \quad g = G\frac{M_T}{r_T^2}$$

L'accelerazione di gravità del pianeta è quindi:

$$g_P = G\frac{M_P}{r_P^2}$$

A questo punto dai dati ricaviamo che: $M_P = 16\, M_T$ e $r_P = 12\, r_T$. Calcoliamo perciò il rapporto tra le due accelerazioni, sostituendo i valori indicati:

$$\frac{g}{g_P} = \frac{G\frac{M_T}{r_T^2}}{G\frac{M_P}{r_P^2}} = \frac{M_T}{r_T^2} : \frac{M_P}{r_P^2} = \frac{M_T}{r_T^2} \cdot \frac{r_P^2}{M_P} = \frac{M_T}{r_T^2} \cdot \frac{(12\, r_T)^2}{16 M_T} = \frac{144}{16} = \mathbf{9}$$

3. La Stazione Spaziale Internazionale (ISS), che dal 2000 è abitata continuativamente da un equipaggio di almeno due astronauti, ha un periodo orbitale di circa 92 minuti. Calcola la sua altitudine media rispetto alla superficie terrestre.

   Eguagliamo la forza centripeta alla forza di attrazione gravitazionale di Newton:

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{m\,M_T}{r^2}$$

   Avendo indicato con m la massa della Stazione Spaziale, con $r = R_T + h$, dove R_T indica il raggio della Terra e h è l'altitudine rispetto alla superficie terrestre. Perciò ricaviamo:

$$r = G\frac{M_T}{v^2} = G\frac{M_T}{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2} \quad \Longrightarrow \quad r^3 = G\frac{M_T\,T^2}{4\pi^2} \quad \Longrightarrow \quad r = \sqrt[3]{G\frac{M_T\,T^2}{4\pi^2}}$$

   A noi però interessa l'altitudine rispetto alla superficie terrestre, perciò:

$$r = R_T + h = \sqrt[3]{G\frac{M_T\,T^2}{4\pi^2}} \quad \Longrightarrow \quad h = \sqrt[3]{G\frac{M_T\,T^2}{4\pi^2}} - R_T = \mathbf{3,8\ \cdot 10^2\ km}$$

4. Determina la velocità di fuga da Marte.

   Utilizziamo il principio di conservazione dell'energia, considerando come situazione finale quella in cui l'energia potenziale e quella cinetica siano nulle, ovvero all'infinito:

$$K_i + U_i = K_f + U_f \quad \Longrightarrow \quad K_i + U_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}mv_f^2 = G\frac{m\,M_M}{r_M}$$

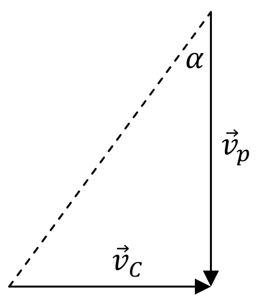
   Dove ho indicato con m la massa dell'oggetto in fuga, con M_M la massa di Marte e con r_M il raggio di Marte, perciò:

$$v_f = \sqrt{2G\frac{M_M}{r_M}} = \mathbf{5,03\ km/s}$$

5. Una donna di 55 kg si trova a bordo di un'automobile che percorre una curva, di raggio 12 m, alla velocità di 50 km/h. Determina il modulo della forza centrifuga avvertita dalla donna.

$$F = m\frac{v^2}{r} = \mathbf{8,8 \cdot 10^2\ N}$$

6. Colto di sorpresa da un intenso temporale mentre era a passeggio, Carlo corre con il suo ombrello verso la fermata del tram alla velocità di 3,0 m/s. Se le gocce di pioggia cadono verticalmente con una velocità approssimativamente costante di 10 m/s, di quanti gradi rispetto alla verticale deve inclinare l'ombrello Carlo per non bagnarsi?



   Nel disegno a lato ho indicato con $\vec{v}_p$ la velocità delle gocce di pioggia, mentre con $\vec{v}_C$ ho indicato la velocità di Carlo. Nella figura è indicato anche l'angolo α da determinare.
   La relazione che lega fra loro i dati indicati è:

$$v_C = v_p tg\alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha = tg^{-1}\frac{v_C}{v_p} = \mathbf{17°}$$

7. Dario sale i gradini di una scala mobile, che a sua volta sale alla velocità di 0,60 m/s. La scala mobile è lunga 18 m e Dario impiega 9,0 s a salire dal piano inferiore a quello superiore. Con quale velocità Dario sale lungo la scala mobile?

$$V = 0{,}60\ m/s \qquad x = 18m \qquad t = t' = 9{,}0\ s \qquad v'?$$

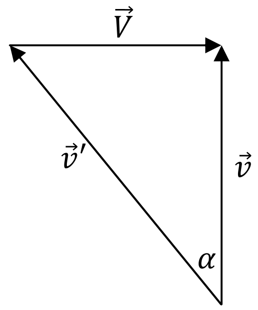
Cominciamo dalle trasformazioni di Galilei della posizione:

$$x = x' + Vt \quad \Longrightarrow \quad x' = x - Vt$$

Possiamo quindi ricavare la velocità v':

$$v' = \frac{x'}{t'} = \frac{x - Vt}{t'} = \mathbf{1,4\ m/s}$$

8. Una barca può muoversi a una velocità di 10 km/h rispetto all'acqua di un fiume che scorre a 5,0 km/h. Il barcaiolo vuole attraversare il fiume perpendicolarmente alle rive: secondo quale angolo deve orientare la sua barca? Se il fiume è largo 35 m, quanto tempo impiega il barcaiolo ad attraversare il fiume?



$$V = 5{,}0\ km/h \qquad v' = 10\ km/h \qquad x = 35m$$

Perché la barca attraversi il fiume perpendicolarmente alle rive, quello che si viene a formare è un triangolo rettangolo, perciò vale la relazione:

$$V = v' sen\alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha = sen^{-1}\frac{V}{v'} = 30°$$

Anche se potevamo ricavarlo da subito, notando che nel triangolo rettangolo l'ipotenusa è doppia del cateto, perciò il triangolo è la metà di un triangolo equilatero e l'angolo minore è la metà di un angolo di 60°.

Per calcolare quanto tempo impiega il barcaiolo ad attraversare il fiume, ricaviamo la velocità v dell'imbarcazione rispetto alla riva e poi usiamo la formula del moto rettilineo uniforme:

$$v = \sqrt{v'^2 - V^2} \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{x}{t} \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{x}{v} = \frac{x}{\sqrt{v'^2 - V^2}} = \mathbf{15\ s}$$

9. Determina il modulo della forza esercitata da Paride, la cui massa è 50 kg, sul pavimento di un ascensore nei seguenti casi:
   a. l'ascensore è fermo;
   b. l'ascensore sale con velocità costante di 1 m/s;
   c. l'ascensore scende con velocità costante di 1 m/s;
   d. l'ascensore sale con accelerazione costante di 2 m/s^2;
   e. l'ascensore scende con accelerazione costante di 2 m/s^2.

A. Se l'ascensore è fermo, il peso apparente è uguale al peso di Paride, perciò: $P_{app} = mg = \mathbf{4,9 \cdot 10^2 N}$

B. Se l'ascensore si muove con velocità costante, sia essa verso l'alto o verso il basse, è come se l'ascensore fosse fermo, perciò si ricade nel punto a.

D. Se l'ascensore sale con accelerazione costante verso l'alto, avrò:

$$P_{app} = mg + ma = \mathbf{5,9 \cdot 10^2 N}$$

E. Se l'ascensore scende con accelerazione costante verso il basso, avrò:

$$P_{app} = mg - ma = \mathbf{3,9 \cdot 10^2 N}$$